

เฉลยตัว Sahapat Admission คณิตศาสตร์ (เฉพาะบัววัน)

เรื่อง ระบบจำนวนจริง

ข้อ 6 ตอบ 5

วิธีทำ พิจารณา A $|x-2| \leq 7$

$$-7 \leq x-2 \leq 7$$

บวก 2 $-5 \leq x \leq 9$

เมื่อ $x \in I \quad \therefore A = \{-5, -4, \dots, 8, 9\}$

พิจารณา B $|x+1| > 2$

$$x+1 > 2 \quad \text{หรือ} \quad x+1 < -2$$

$$x > 1 \quad \quad \quad x < -3$$



เมื่อ $x \in I \quad \therefore B = \{\dots, -5, -4, 2, 3, \dots\}$

$$\therefore A \cap B = \{-5, -4, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$n(A \cap B) = 10$ ตัว $\therefore$ คำตอบที่ 1 ผิด

สมาชิกของ $A \cap B$ ที่เป็นจำนวนเฉพาะที่มากที่สุดคือ 7 $\therefore$ คำตอบที่ 2 ผิด

สมาชิกของ $A \cap B$ ที่มีค่าน้อยที่สุดคือ -5 $\therefore$ คำตอบที่ 3 ผิด

ผลบวกของสมาชิกทุกตัวของ $A \cap B = (-5) + (-4) + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$

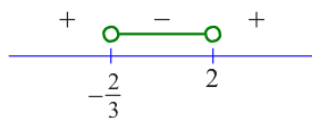
$\therefore$ คำตอบที่ 5 ถูก

ข้อ 7 ตอบ 2

วิธีทำ พิจารณา $P(x)$

$$3x^2 - 4x - 4 < 0$$

$$(3x+2)(x-2) < 0$$



$$\therefore P(x) \text{ แทน } x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$$

พิจารณา $Q(x)$

$$\text{และ } x^2 > |x^2 - 4|$$

$$|x^2| > |x^2 - 4| \rightarrow$$

$$|\square| > |\Delta|$$

$$\text{จะได้ } (\square - \Delta)(\square + \Delta) > 0$$

$$\text{จะได้ } (x^2 - (x^2 - 4))(x^2 + (x^2 - 4)) > 0$$

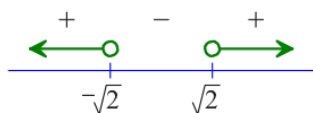
$$(4)(2x^2 - 4) > 0$$

$$(4)(2)(x^2 - 2) > 0$$

นำ 8หาร 2 ข้าง

$$x^2 - 2 > 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0$$



$$\therefore Q(x) \text{ แทน } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

พิจารณา (ก) เมื่อ $\mathcal{U} = (1, 2)$

$$\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$$

$$\equiv \forall x[x \in (-\frac{2}{3}, 2)] \rightarrow \exists x[x \in (-\frac{2}{3}, 2) \text{ และ } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)]$$

$$\equiv T \rightarrow T \equiv T \quad (\text{ก}) \text{ ถูก }$$

หมายเหตุ $\forall x[x \in (-\frac{2}{3}, 2)] \equiv T$

(เพราะ $(1, 2) \subset (-\frac{2}{3}, 2)$ ดังนั้นสมาชิกทุกตัวใน $(1, 2)$

จะเป็นสมาชิกของ $(-\frac{2}{3}, 2)$)

$$\exists x[x \in (-\frac{2}{3}, 2) \text{ และ } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)] \equiv T \text{ (เช่น } x = 1.5)$$

พิจารณา (ข)

จาก (ก) เราทราบว่า $\forall x[P(x)] \equiv T$

ดังนั้น $\exists x[Q(x)] \rightarrow \underbrace{\forall x[P(x)]}_T \equiv T \quad (\text{ข}) \text{ ผิด}$

ข้อ 8 ตอบ 3

วิธีทำ พิจารณา A $||x-1|-1| < 1$

$$-1 < |x-1|-1 < 1$$

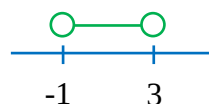
บวก 1 $0 < |x-1| < 2$

$$0 < |x-1| \quad \text{และ} \quad |x-1| < 2$$

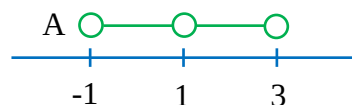
$$|x-1| > 0 \quad \downarrow \quad -2 < x-1 < 2$$

$$x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad -1 < x < 3$$

(ใช้ได้ทุกตัวยกเว้น 1)



ดังนั้น



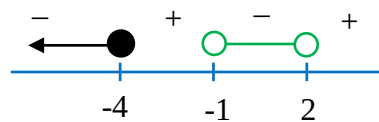
พิจารณา B $\frac{1}{x+1} \geq \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)}, x \neq -1, 1, 2$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} \geq 0$$

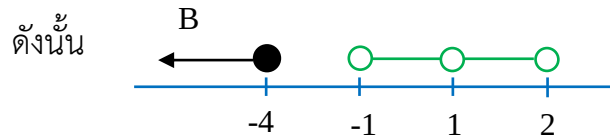
$$\frac{(x-2) - 2(x+1)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{(-x-4)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{(x+4)}{(x+1)(x-2)} \leq 0$$



แต่เนื่องจาก $x \neq -1, 1, 2$



$$A \cap B = (-1, 1) \cup (1, 2)$$

$$\therefore A \cap B \subset (-1, 3)$$

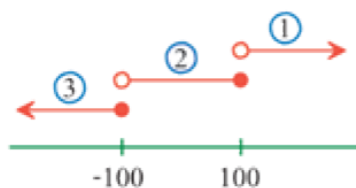
ข้อ 9 ตอบ 4

จากโจทย์ $||100+x| - |100-x|| < 100$

จะได้ว่า $||x+100| - |x-100|| < 100$

ใช้เทคนิคการแบ่งกรณี

โดยแบ่งเป็น 3 กรณี



กรณีที่ 1 $x > 100$

$$|(x+100) - (x-100)| < 100$$

$$|200| < 100$$

อสมการนี้เท็จเสมอ จึงไม่มีคำตอบ

กรณีที่ 2 $-100 < x \leq 100$

$$|(x+100) - (-(x-100))| < 100$$

$$|x+100+x-100| < 100$$

$$|2x| < 100$$

นำ 2 หาร $|x| < 50$

$$-50 < x < 50$$

$$\therefore x \in (-50, 50)$$

กรณีที่ 3 $x \leq -100$

$$|-(x+100) - (-(x-100))| < 100$$

$$|-x-100+x-100| < 100$$

$$|-200| < 100$$

อสมการนี้เท็จเสมอจึงไม่มีคำตอบ

พบว่ามีคำตอบเฉพาะกรณีที่ 2

ดังนั้น เซตคำตอบ = $(-50, 50)$

และ จำนวนเต็ม x ที่เป็นคำตอบ = $-49, -48, \dots, 48, 49$

$$\text{รวมทั้งหมดมี } 49+1+49 = 99$$

เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ข้อ 4 ตอบ 4

วิธีทำ

พิจารณา ก เมื่อ $x \leq 0$

$$g(f(x)) = g(\sqrt{9-x}) \leftarrow \text{เพราะเมื่อ } x \leq 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{9-x}$$

$$= \sqrt{9-x} - 4$$

ดังนั้น ก. ถูก

เพราะเมื่อ $x \leq 0 \rightarrow -x \geq 0$

$\rightarrow 9-x \geq 9$

$\rightarrow \sqrt{9-x} \geq 3$

$\therefore \sqrt{9-x} \geq 1$

จะได้ $g(\sqrt{9-x}) = \sqrt{9-x} - 4$

พิจารณา ข เมื่อ $4 < x \leq 6$ $\leftarrow$ เพราะเมื่อ $4 < x \rightarrow f(x) = 7-x$

$$g(f(x)) = g(7-x)$$

$$= 3-x$$

ดังนั้น ข. ถูก

เพราะเมื่อ $4 < x \leq 6$

$-4 > -x \geq -6$

บวก 7 $3 > 7-x \geq 1$

$\therefore 7-x \geq 1$

จะได้ $g(7-x) = (7-x) - 4 = 3-x$

พิจารณา ค เมื่อ $x > 6$

$$g(f(x)) = g(7-x) \quad \text{เพราะเมื่อ } x > 6 \rightarrow x > 4$$

$$= 9-x \quad \rightarrow f(x) = 7-x$$

ดังนั้น ค. ถูก

เพราะเมื่อ $x > 6$

$$-x < -6$$

บวก 7 $7-x < 1$

เมื่อ $7-x < 1$

จะได้ $g(7-x) = 7-x+2$
 $= 9-x$

ข้อ 5 ตอบ 4

วิธีทำ จาก $(f^{-1} \circ g)(x) = 3x f(x) - 3x - 4$
 $f^{-1}(g(x)) = 3x f(x) - 3x - 4 \quad \text{--- (1)}$

จาก $f(x+3) = x+4$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad x-3 \quad \quad \quad x-3$
 $f(x-3+3) = (x-3)+4$
 $f(x) = x+1 \quad \text{--- (2)}$

Inv $x = y+1$
 $y = x-1$
 $f^{-1}(x) = x-1$
 $\therefore f^{-1}(g(x)) = g(x)-1 \quad \text{--- (3)}$

แทน (2), (3) ใน (1)

$$g(x)-1 = 3x(x+1)-3x-4$$

$$g(x)-1 = 3x^2+3x-3x-4$$

$$g(x) = 3x^2-3 \quad \text{--- (4)}$$

หา A โดย $A = R_{g \circ f}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 3(x+1)^2 - 3$$

จะได้ $y = 3(x+1)^2 - 3 \rightarrow \frac{3(x+1)^2}{\geq 0} = \frac{y+3}{\geq 0}$
 $\therefore y+3 \geq 0 \rightarrow y \geq -3 \quad \therefore A = R_{g \circ f} = [-3, \infty)$

หา B โดย $B = R_{f \circ g}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x^2-3) = (3x^2-3)+1$$

จะได้ $y = 3x^2-2 \rightarrow \frac{3x^2}{\geq 0} = \frac{y+2}{\geq 0}$
 $\therefore y+2 \geq 0 \rightarrow y \geq -2 \quad \therefore B = R_{f \circ g} = [-2, \infty)$

ดังนั้น $A - B = [-3, \infty) - [-2, \infty) = [-3, -2)$
 ซึ่ง $[-3, -2) \subset (-4, -2)$

ข้อ 6 ตอบ 2

วิธีทำ จาก

$$g(1+x) = x(2+x)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $x-1$ $x-1$ $x-1$

แทน x ด้วย $x-1$

$$g(1+x-1) = (x-1)(2+x-1)$$

$$g(x) = (x-1)(1+x) = x^2 - 1$$

และจาก $f \circ g(x) = x^2 + 1$

$$f(g(x)) = x^2 + 1$$

$$f(\overset{\textcircled{x^2}}{x^2} - 1) = \overset{\textcircled{x^2}}{x^2} + 1$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x+1$ $x+1$

แทน x^2 ด้วย $x+1$

$$f(x+1-1) = (x+1) + 1$$

$$f(x) = x + 2$$

พิจารณา (ก)

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$$

$$g(f(x)) = f(g(x))$$

$$g(x+2) = f(x^2-1)$$

$$(x+2)^2 - 1 = (x^2-1) + 2$$

$$x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 1$$

$$4x = -2 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \{x \in \mathbb{R} / (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)\} = \{-\frac{1}{2}\} \quad (\text{ก}) \text{ ผิด}$$

พิจารณา (ข)

$$(g \circ f)(x) + 1 \geq 0$$

จาก (ก) $[(x+2)^2 - 1] + 1 \geq 0$

$$(x+2)^2 \geq 0 \quad \text{จริงเสมอ}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนจริง $x \geq -1$ ทำให้สมการนี้เป็นจริง $\therefore$ (ข) ถูก

เรื่อง สถิติ

ข้อ 6 ตอบ 31

จากข้อมูลกลุ่มตัวอย่างได้

$$\bar{x} = \frac{2+5+8+10+12+15+18}{7} = 10$$

$$\begin{aligned} \text{และจะได้ } s^2 &= \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1} \\ &= \frac{(2-10)^2 + (5-10)^2 + (8-10)^2 + (10-10)^2 + (12-10)^2 + (15-10)^2 + (18-10)^2}{7-1} \\ &= \frac{64+25+4+0+4+25+64}{6} \\ &= 31 \quad \therefore s^2 = 31 \end{aligned}$$

ข้อ 7 ตอบ 0396.00

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่า $N = 2n$

$$\begin{aligned} \text{และ } \sum x^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + \dots + (-n)^2 \\ &= 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

$$\text{และ } \mu = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n + (-1) + (-2) + (-3) + \dots + (-n)}{2n}$$

$$= \frac{0}{2n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma^2 &= \frac{\sum x^2}{N} - \mu^2 \\ &= \frac{2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)}{2n} - (0)^2 \\ &= \frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{n} \end{aligned}$$

$$46 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$276 = 2n^2 + 3n + 1$$

$$0 = 2n^2 + 3n - 275$$

$$0 = (n-11)(2n+25)$$

$$n = 11, -\frac{25}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ค่าเฉลี่ยของ } 1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3 &= \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n} \\
 &= \frac{\left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2}{n} \\
 \text{เมื่อ } n=11, &= \frac{\left[\frac{11}{2}(11+1)\right]^2}{11} = \frac{66^2}{11} = 396
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$$

ข้อ 8 ตอบ 4

วิธีทำ จากโจทย์

$$\begin{aligned}
 \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{10}^2}{10} &= 70 \\
 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 &= 70 \times 10 \\
 &= 700
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และจาก } \sum_{i=1}^{10} (x_i - 3)^2 &= 310 \\
 \sum_{i=1}^{10} (x_i^2 - 6x_i + 9) &= 310 \\
 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 6 \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} 9 &= 310 \\
 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 6(10\mu) + 10 \cdot 9 &= 310 \\
 700 - 60\mu + 90 &= 310
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10\mu$$

$$\therefore \mu = 8$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{N} - \mu^2 \\
 &= \frac{700}{10} - 8^2 = 6
 \end{aligned}$$

เราจะได้ว่า ข้อมูลชุดแรก $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ จะมี $\sigma_1^2 = 6$
 และเมื่อพิจารณา ข้อมูล ชุดที่ 2 $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, \dots, 3x_{10} - 1$
 จะได้ว่า $\sigma_2^2 = (3)^2 \cdot \sigma_1^2$
 $= 9 \cdot 6$
 $= 54$

หมายเหตุ เมื่อ $y_i = c x_i + d$ จะได้ว่า $\sigma_y^2 = c^2 \sigma_x^2$

ข้อ 10 ตอบ 0.8

วิธีทำ จาก $M.D. = \frac{\sum |x - \mu|}{N}$

เมื่อโจทย์ ให้ $M.D. = 3$ และ $\mu = 6$

$$\therefore 3 = \frac{|a-6| + |4-6| + |5-6| + |6-6| + |b-6|}{5}$$

$$15 = |a-6| + 2 + 1 + 0 + |b-6|$$

จากโจทย์ $a \leq 4 \quad \therefore |a-6| = -(a-6) = 6-a$

และ $b \geq 6 \quad \therefore |b-6| = b-6$

จะได้ว่า $15 = 6-a+3+b-6 \quad \therefore b-a = 12 \text{ —————(1)}$

และจาก $\mu = 6$

ดังนั้น $6 = \frac{a+4+5+6+b}{5} \quad \therefore b+a = 15 \text{ —————(2)}$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของพิสัย} = \frac{x_{MAX} - x_{Min}}{x_{MAX} + x_{Min}}$$

$$= \frac{b-a}{b+a}$$

$$= \frac{12}{15} \quad (\text{จาก (1) และ (2)})$$

$$= 0.8$$

ข้อ 11 ตอบ 0.7

วิธีทำ จาก $\sum_{i=1}^{10} (x_i - 5)^2 \leq \sum_{i=1}^{10} (x_i - a)^2$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

จะได้ว่า $\mu = 5$ และได้อีกว่า $\sum_{i=1}^{10} x_i = \mu \cdot N = 5 \cdot 10 = 50$

$$\text{จากโจทย์ } \sum_{i=1}^{10} (x_i - 8)^2 = 212.5$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i^2 - 16x_i + 64) = 212.5$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 16 \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} 64 = 212.5$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 16(50) + (10)(64) = 212.5$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 372.5$$

$$\text{จาก } S.D. = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \mu^2}$$

$$\text{จะได้ว่า } S.D. = \sqrt{\frac{372.5}{10} - 5^2} = \sqrt{12.25} = 3.5$$

$$\therefore \text{สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน} = \frac{S.D.}{\mu}$$

$$= \frac{3.5}{5} = 0.7$$

ข้อ 12 ตอบ 0.2

วิธีทำ จากโจทย์ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย = 0.12

$$\therefore \frac{\text{M.D.}}{\mu} = 0.12$$

และจากโจทย์ M.D. = 6

$$\text{ดังนั้น } \frac{6}{\mu} = 0.12 \rightarrow \frac{6}{\mu} = \frac{12}{100}$$

$$\therefore \mu = 50$$

เมื่อ S.D. = 10 จะได้ว่า ส.ป.ส. การแปรผัน = $\frac{\text{S.D.}}{\mu} = \frac{10}{50} = 0.2$
