

PAT 1

ข้อสอบพร้อมเฉลย

คณิตศาสตร์ PAT 1 (ก.พ. 62)



By We Math Tutors

1. กำหนดให้ P แทน $2^{67} < 5^{30}$ และ Q แทน $2^{69} > 5^{31}$

ประพจน์ $(Q \leftrightarrow \sim P) \rightarrow Q$ มีค่าความจริงตรงกับค่าความจริงของประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|---|---|
| 1. $(Q \wedge P) \rightarrow P$ | 2. $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$ |
| 3. $(\sim Q \rightarrow P) \rightarrow Q$ | 4. $(P \leftrightarrow \sim Q) \wedge P$ |
| 5. $P \leftrightarrow (\sim Q \wedge P)$ | |

2. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ประพจน์ $\exists x[4^x + 2^x = 72]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--|---|
| 1. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x-3 \leq 7\}$ | 2. $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x-2 > 7\}$ |
| 3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 8 = 6x\}$ | 4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x-3 > 1\}$ |
| 5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 < 3\}$ | |

3. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ

$$|x^2 - 2x| - x \leq 4$$

จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------|-------|
| 1. 4 | 2. 8 |
| 3. 16 | 4. 32 |
| 5. 64 | |

4. เซตคำตอบของอสมการ $2^{2x+1} + 3^{2x+1} \leq 5(6^x)$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1. $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ | 2. $(-\infty, -3) \cup (-1, 3)$ |
| 3. $(-5, -1) \cup (0, 5)$ | 4. $(-3, 0) \cup (1, \infty)$ |
| 5. $(-2, 1) \cup (3, \infty)$ | |

5. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$\text{ให้ } f = \{(x, y) \in R \times R \mid y + x = |x|\}$$

$$\text{และ } g = \{(x, y) \in R \times R \mid y - x = |x|\}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(ก) \quad go(fog) = (fog)og$$

$$(ข) \quad (gof) - f = (fog) + f$$

$$(ค) \quad fo(fog) = fg$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

6. ค่าของ $\arccos(\sin \frac{17\pi}{7}) - \arcsin(\sin \frac{10\pi}{7})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

$$1. -\frac{5\pi}{14}$$

$$2. \frac{\pi}{14}$$

$$3. \frac{2\pi}{7}$$

$$4. \frac{\pi}{2}$$

$$5. \frac{3\pi}{2}$$

7. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$(x + y)3^{y-x} = \frac{2}{9} \quad \text{และ} \quad 2\log_2(x + y) = x - y$$

แล้วค่าของ $x^2 + y^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

$$1. 4$$

$$2. 8$$

$$3. 9$$

$$4. 10$$

$$5. 16$$

8. ให้พาราโบลาชนิดหนึ่งมีสมการ $y = x^2 + 1$ สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC โดยที่จุด A เป็นจุดยอดของพาราโบลา จุด B(x, y) และจุด C(2, 5) เป็นจุดบนพาราโบลา ถ้ามุม $\hat{ABC}$ เป็นมุมฉาก แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $2\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
 2. 3 ตารางหน่วย
 3. $3\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
 4. 4 ตารางหน่วย
 5. $4\sqrt{3}$ ตารางหน่วย
9. กำหนดให้ $a = \cos 15^\circ + \cos 50^\circ$ และ $b = \sin 15^\circ + \sin 50^\circ$ ค่าของ $\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. $1 + \cos 25^\circ$
 2. $1 + \cos 35^\circ$
 3. $1 + \cos 65^\circ$
 4. $1 + \cos 75^\circ$
 5. $1 + \cos 85^\circ$
10. ให้ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งผ่านจุด (0, 1) และจุด (1, 1) และเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ มีความชันเท่ากับ $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้า $f'(0) = 1$ และ $f''(1) = 2$ แล้วฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{11}{27}$
 2. $\frac{13}{27}$
 3. $\frac{31}{27}$
 4. $\frac{34}{27}$
 5. $\frac{43}{27}$

11. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเดียวกัน 3 สีๆ ละ n ลูก เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูกจากกล่องนี้ โดยหยิบทีละลูก แบบไม่ใส่กลับคืนลงในกล่อง ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีละลูก เท่ากับ $\frac{2}{5}$ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอล 3 ลูกโดยมีเพียง 2 สีเท่านั้น เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{15}$

2. $\frac{4}{15}$

3. $\frac{7}{15}$

4. $\frac{8}{15}$

5. $\frac{9}{15}$

12. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกัน และสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

(ก) $\log_2 a < \log_2 b$

(ข) $2^b \times 3^d > 2^d \times 3^b$

(ค) $6^a - 9^c > 3^c(2^a - 3^a)$

ผลบวกในข้อใดต่อไปนี้ ที่มีค่ามากที่สุด

1. $a + b$

2. $b + d$

3. $a + c$

4. $c + d$

5. $a + d$

13. ลูกอมรสนม ราคาเม็ดละ 5 บาท และลูกอมรสน้ำผึ้ง ราคาเม็ดละ 7 บาท
ต้องการซื้อลูกอมทั้งสองรส เป็นเงินทั้งสิ้น 287 บาท

(โดยมีลูกอมรสนมอย่างน้อย 1 เม็ด และลูกอมรสน้ำผึ้งอย่างน้อย 1 เม็ด)

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) จำนวนวิธีที่ได้ลูกอมทั้งสองรส มีทั้งหมด 9 วิธี

(ข) ได้จำนวนลูกอมทั้งสองรส อย่างน้อย 43 เม็ด

(ค) ได้ลูกอมทั้งสองรส มีจำนวนมากที่สุด 57 เม็ด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

14. วงกลมวงหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ และสัมผัสกับแกน y ที่จุด P

ให้ L เป็นเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและขนานกับเส้นตรง $2x - 2y = 1$

ระยะระหว่างจุด P กับเส้นตรง L เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 3. $\sqrt{2}$ | 4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ |
| 5. $\sqrt{5}$ | |

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้าม มุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $b = a(\sqrt{3}-1)$ และมุม C มีขนาด 30° แล้วค่าของ $\sin 3B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. 1
4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีสมการเป็น $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$ และ

ให้ F เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา H ที่อยู่ทางขวาสุดของจุด $(0, 0)$

ให้ E เป็นวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่ F โดยที่

จุด $(0, 0)$ และจุด F อยู่ทางซ้ายของจุดศูนย์กลางของวงรี E

ถ้าผลต่างของความยาวแกนเอกและความยาวแกนโท เท่ากับ 2 แล้ว

ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี E ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.2
2. 0.3
3. 0.4
4. 0.5
5. 0.6

17. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 ที่สอดคล้องกับ $CA = AB$

ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ $\det(C^2 + xB) = -20$

แล้วค่าของ $x^2 + x + 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 7
3. 13
4. 21
5. 31

18. ให้ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S

ถ้า A, B และ C เป็นเซต โดยที่ $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(A \cap C) = 3$

และ $n(A \cup B \cup C) = 18$ แล้วค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $n(B \cup C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------|-------|
| 1. 10 | 2. 12 |
| 3. 13 | 4. 14 |
| 5. 15 | |

19. ให้ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบ โดยที่ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ และ

มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{a}$ กับ $\vec{b}$ เท่ากับ 60° ถ้าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$

และเวกเตอร์ $\vec{b}$ เท่ากับ 2 หน่วย และ 1 หน่วย ตามลำดับ

แล้วมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{b}$ กับเวกเตอร์ $\vec{c}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$ | 2. $\pi - \arcsin \sqrt{\frac{3}{7}}$ |
| 3. $\frac{\pi}{2} + \arcsin \sqrt{\frac{3}{7}}$ | 4. $\pi - \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 5. $\frac{2\pi}{3} + \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$ | |

20. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z - 2 + i| = |z + 2 - 2i|$

และ $|z + 1| = |z + i|$ เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ z

ค่าของ $|2z|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------|-------|
| 1. 10 | 2. 12 |
| 3. 15 | 4. 18 |
| 5. 32 | |

21. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริง โดยที่มีผลบวก 5 พจน์แรกเป็น 275

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 243$ แล้วค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|----------|-----------|
| 1. 0 | 2. 60.75 |
| 3. 121.5 | 4. 303.75 |
| 5. 607.5 | |

22. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังสอง ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(2, 2)$ และมีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(1, 3)$

แล้ว ค่าของ $\int_{-1}^2 f(x) dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. 7 | 2. 6 |
| 3. $\frac{16}{3}$ | 4. $\frac{14}{3}$ |
| 5. $\frac{8}{3}$ | |

23. ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้า $\vec{a} + \vec{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย แล้วขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a} \times \vec{b}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. 0 | 2. $\frac{1}{2}$ |
| 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 5. 1 | |

24. ผลการสอบของนักเรียนห้องหนึ่ง มีการแจกแจงความถี่ ดังนี้

คะแนน	ความถี่
30 – 39	2
40 – 49	5
50 – 59	8
60 – 69	7
70 – 79	a
80 – 89	b
90 – 99	c

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าควอร์ไทล์ที่ 1 (Q_1) ของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 54.5 แล้ว

นักเรียนทั้งหมดในห้องนี้ มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 36 คน
2. 40 คน
3. 44 คน
4. 48 คน
5. 52 คน

25. กำหนดข้อมูลของประชากรชุดหนึ่ง ดังนี้

$$2, 2 + d, 2 + 2d, 2 + 3d, \dots, 2 + 30d$$

เมื่อ d เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้าความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับ 320

แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 24.5
2. 32
3. 39.5
4. 47
5. 54.5

26. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และสอดคล้องกับ

$$f(x+h) - f(x) = 2h^3 + (6x+1)h^2 + 2x(3x+1)h$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x และ h ถ้าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 4

แล้วค่าของ $f(2) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------|-------|
| 1. 28 | 2. 32 |
| 3. 34 | 4. 36 |
| 5. 40 | |

27. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

ถ้า $f : I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(5) = 16$ และ

$$f(n) = \begin{cases} f(n-2) + 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ f(n+1) - n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

แล้วค่าของ $\sum_{n=-3}^3 f(n)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-------|-------|
| 1. 8 | 2. 10 |
| 3. 12 | 4. 15 |
| 5. 24 | |

28. กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง Z ดังนี้

Z	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.4032	0.4192	0.4332	0.4452	0.4554

ความสูงของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 162 เซนติเมตร ถ้านักเรียนที่มีความสูงน้อยกว่า 155 เซนติเมตร มีอยู่ 8.08 % แล้วนักเรียนที่มีความสูงในช่วง 155 – 170 เซนติเมตร มีจำนวนคิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 82.24
2. 83.84
3. 85.24
4. 86.44
5. 87.46

29. กำหนดให้สมการจุดประสงค์ $P = ax + by$ เมื่อ $0 < a < b \leq 2a$

และอสมการข้อจำกัด ดังนี้

$$x + 3y \leq 12$$

$$x + y \geq 4$$

$$3y - x \geq 6$$

และ $x \geq 0, y \geq 0$

ถ้าค่ามากที่สุดของ P เท่ากับ 15 และค่าน้อยที่สุดของ P เท่ากับ 10.5

แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5
2. 10
3. 13
4. 20
5. 25

30. จากการสอบถามพนักงานบริษัทแห่งหนึ่งจำนวน n คนที่มีเงินเดือน ตั้งแต่ 10,000 บาท ถึง 100,000 บาท เกี่ยวกับเงินออมต่อเดือน ดังนี้

พนักงานคนที่	เงินเดือน (หมื่นบาท) (a)	เงินออม (พันบาท) (b)
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
3	a_3	b_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_n	b_n

โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินเดือนเท่ากับ 64,000 บาท

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินออมเท่ากับ 2,000 บาท และความสัมพันธ์

ระหว่างเงินเดือนและเงินออมเป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง

ถ้าพนักงานมีเงินออมเดือนละ 1,000 บาท ประมาณได้ว่าพนักงานคนนี้

มีเงินเดือน 26,000 บาท แล้วพนักงานมีเงินออมเดือนละ 1,500 บาท

จะประมาณได้ว่าเขามีเงินเดือนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 39,000 บาท
2. 45,000 บาท
3. 52,000 บาท
4. 58,000 บาท
5. 65,000 บาท

31. ให้ A แทนเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} + 3\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}} = 4$$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่น้อยที่สุดในเซต A

และ b เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุดในเซต A

แล้ว $a^2 + b^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

32. คนกลุ่มหนึ่ง มีผู้ชาย 10 คน และผู้หญิง 7 คน โดยมีนาย ก. และนาย ข.

รวมอยู่ด้วย จะมีกี่วิธีในการเลือกคณะกรรมการ 6 คน จากคนกลุ่มนี้ ประกอบด้วย

ผู้ชายอย่างน้อย 2 คน และผู้หญิงอย่างน้อย 3 คน โดยมีเงื่อนไขว่า นาย ก. และ

นาย ข. จะเป็นกรรมการพร้อมกันไม่ได้

33. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริงบวก

โดยมีผลบวก n พจน์แรกของลำดับ เท่ากับ $3n^2 + 2n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{ถ้า } \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}} = m$$

แล้วจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่า m เท่ากับเท่าใด

34. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่มุม C เป็นมุมฉาก

และมุม A สอดคล้องกับสมการ $2\cos 2A - 8\sin A + 3 = 0$

ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้าม มุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ

ถ้า $a + c = 30$ แล้วค่าของ $a\sin A + b\sin B$ เท่ากับเท่าใด

35. กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และให้ A และ B เป็นสับเซตของ $\mathcal{U}$

โดยที่ $A \cap B = \{1, 9\}$, $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$

และ $\mathcal{U} - A = \{3, 5, 6, 7\}$ จำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ เท่ากับเท่าใด

36. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันโดยที่

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{เมื่อ } x \leq 4 \\ 3x-10 & \text{เมื่อ } x > 4 \end{cases}$$

$$\text{และ } g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \frac{1}{2}(x+5) & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $(f \circ g^{-1})(x) = 2$ แล้ว x เท่ากับเท่าใด

37. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงบวก x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$(\log_3 9x)^2 - 3 \log_{\sqrt{3}} x - 7 = 0$$

ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

38. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ที่นิยาม

โดย $f(x) = x^2 - x + a$ และ $g(x) = x^2 + bx$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

แล้ว $f(b) + g(a)$ เท่ากับเท่าใด

39. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+\sqrt{1+x}}}{\sqrt[3]{8+x}-2}$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงจัดเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต

โดยที่ $a+b+c = 14$ และ $a, b+3, c+4$ จัดเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต

ค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับเท่าใด

41. กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงผลทดสอบของนักเรียนห้องหนึ่ง ดังนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
0	$a - 2$
1	a
2	a^2
3	$(a + 1)^2$
4	$2a$
5	$a + 1$

เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าคะแนนเฉลี่ยเลขคณิตของผลทดสอบเท่ากับ 2.8 แล้ว

จำนวนนักเรียนห้องนี้ เท่ากับเท่าใด

42. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

ให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันโดยที่

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 4x + c & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง และสอดคล้องกับ

$$f'(3) + f(3) = 45 \text{ และ } \int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{2}$$

แล้วค่าของ $f(a) + f(b) + f(c)$ เท่ากับเท่าใด

43. กำหนดให้ A เป็นเซตของลำดับเลขคณิต 1, 4, 7, 10, ...

ให้ $f(x) = 5x + 3$ และ $g(x) = x + 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
ถ้า

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{เมื่อ } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{เมื่อ } x \notin A \end{cases}$$

แล้วค่าของ $h(h(h(100)))$ เท่ากับเท่าใด

44. กล้องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง ลูกบอลสีเขียวและลูกบอลสีเหลือง

โดยมีจำนวนลูกบอลสีแดงคิดเป็นร้อยละ 30 และมีจำนวนลูกบอลสีเขียว

คิดเป็นร้อยละ 20 ถ้าเพิ่มจำนวนลูกบอลสีเหลืองอีก 20 ลูกใส่ลงในกล้องใบนี้

พบว่าจำนวนลูกบอลสีเหลืองคิดเป็นร้อยละ 60

จงหาว่าในกล้องใบนี้มีจำนวนลูกบอลสีแดงทั้งหมดกี่ลูก

45. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & b & 2 \\ -1 & 3 & c \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

และ $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 โดยที่ $AB = C$ และ

$$A \begin{bmatrix} 4a + 1 \\ 5b + 2 \\ 4c + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

แล้ว ค่าของ $a + b + c$ เท่ากับเท่าใด

เฉลย ข้อสอบคณิตศาสตร์ PAT 1

1. ตอบ 3

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccc} \text{จาก} & 2^9 & < & 5^4 \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & 512 & & 625 \end{array}$$

ยกกำลัง 7 2 ข้าง

$$(2^9)^7 < (5^4)^7$$

$$2^{63} < 5^{28}$$

$$2^{63} \cdot 2^4 < 5^{28} \cdot 2^4$$

$$2^{67} < 5^{28} \cdot 2^4 < 5^{28} \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & 16 & 25 \end{array}$$

$$\therefore 2^{67} < 5^{30} \text{ — (1) จะได้ว่า } P \equiv T$$

จาก (1) จะได้

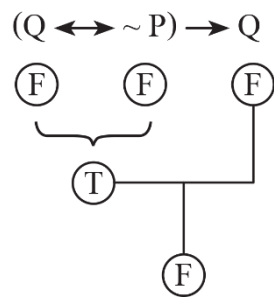
$$2^{67} \cdot 2^2 < 5^{30} \cdot 2^2$$

$$2^{69} < 5^{30} \cdot 2^2 < 5^{30} \cdot 5^1$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 5 \end{array}$$

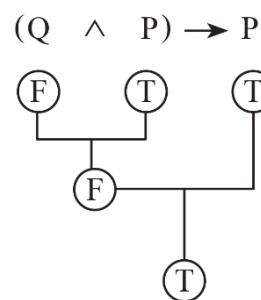
$$\therefore 2^{69} < 5^{31} \text{ จะได้ว่า } Q \equiv F$$

จากโจทย์

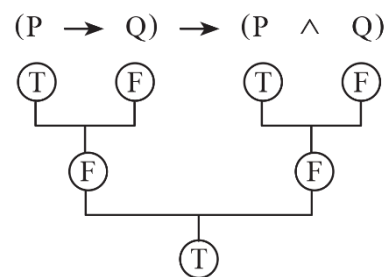


พิจารณาได้ว่า

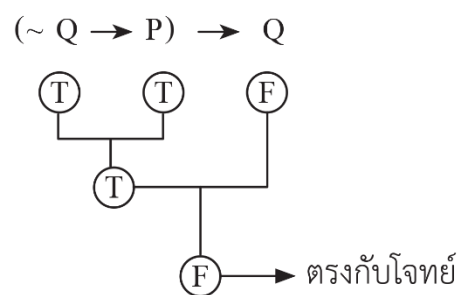
คำตอบที่ 1



คำตอบที่ 2



คำตอบที่ 3



คำตอบที่ 4, 5 → ทำเองบ้างน้า

2. ตอบ 1

วิธีทำ

จากโจทย์ $4^x + 2^x = 72$

$$(2^2)^x + 2^x - 72 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 72 = 0$$

$$(2^x + 9)(2^x - 8) = 0$$

$$\therefore 2^x = \cancel{9}, 8$$

$$2^x = 8 \rightarrow x = 3$$

$$\exists x[4^x + 2^x = 72] \equiv \exists x[x = 3]$$

ดังนั้น 9 ที่จะทำให้ $\exists x[x = 3]$ เป็นจริงต้องมี 3 เป็นสมาชิก เราจะใช้วิธีแทน $x = 3$

ลงในแต่ละคำตอบ คำตอบใดแทน $x = 3$ แล้วสอดคล้องกับเงื่อนไข (จริง) แสดงว่า

มี 3 เป็นสมาชิกและเป็นคำตอบ ซึ่งเมื่อเราแทน $x = 3$ ลงใน 5 คำตอบ พบว่า

มีเพียงคำตอบที่ 1 เท่านั้นที่สอดคล้อง ($|2 \cdot 3 - 3| \leq 7$ จริง)

3. ตอบ 5

วิธีทำ

จากโจทย์ $|x^2 - 2x| - x \leq 4$

$$|x^2 - 2x| \leq x + 4$$

$$-(x + 4) \leq x^2 - 2x \leq x + 4$$

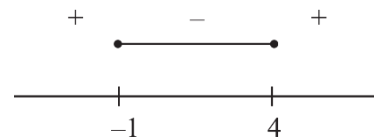
$$-x - 4 \leq x^2 - 2x \quad \text{และ} \quad x^2 - 2x \leq x + 4$$

$$0 \leq x^2 - x + 4 \quad \cap \quad x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$x^2 - x + 4 \geq 0$$

$$(x - 4)(x + 1) \leq 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0$$



$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการนี้คือ $[-1, 4]$

และ $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$n(A) = 6$ จึงได้ว่า จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซต $A = 2^{n(A)} = 2^6 = 64$

4. ตอบ 5

วิธีทำ $2^{2x} \cdot 2^1 + 3^{2x} \cdot 3^1 - 5 \cdot 6^x \leq 0$

$$2(4^x) + 3(9^x) - 5(6^x) \leq 0$$

$$\frac{2(4^x)}{4^x} + \frac{3(9^x)}{4^x} - \frac{5(6^x)}{4^x} \leq 0$$

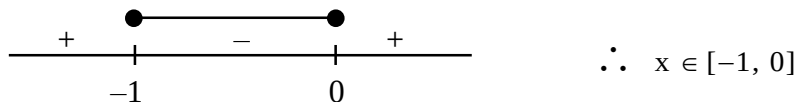
$$2 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 0, \text{ ให้ } A = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

จะได้ $3A^2 - 5A + 2 \leq 0$

$$(3A - 2)(A - 1) \leq 0$$

ถ้า $3A - 2 = 0 \rightarrow A = \frac{2}{3} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \rightarrow x = -1$

ถ้า $A - 1 = 0 \rightarrow A = 1 \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \rightarrow x = 0$



พบว่า $[-1, 0] \subset (-2, 1) \cup (3, \infty)$

5. ตอบ 4

วิธีทำ

จากโจทย์ พิจารณา $f \rightarrow y + x = |x|$

$$y = |x| - x$$

$$f(x) = |x| - x$$

$$f(x) = \begin{cases} x - x = 0, & x \geq 0 \\ -x - x = -2x, & x < 0 \end{cases}$$

พิจารณา $g \rightarrow y - x = |x|$

$$y = |x| + x$$

$$g(x) = |x| + x$$

$$g(x) = \begin{cases} x + x = 2x, & x \geq 0 \\ -x + x = 0, & x < 0 \end{cases}$$

พิจารณา (ก)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(2x) = 0, & x \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ f(0) = 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = 0$$

$$(g \circ (f \circ g))(x) = g((f \circ g)(x)) = g(0) = 2(0) = 0$$

$$((f \circ g) \circ g)(x) = (f \circ g)(g(x)) = 0$$

$$\therefore g \circ (f \circ g) = (f \circ g) \circ g \rightarrow (\text{ก}) \text{ ถูก }$$

พิจารณา (ข)

$$\begin{aligned} ((g \circ f) - f)(x) &= (g \circ f)(x) - f(x) \\ &= g(f(x)) - f(x) \\ &= \begin{cases} g(0) - 0 = 2(0) - 0, & x \geq 0 \\ g(-2x) - (-2x) = 2(-2x) + 2x, & x < 0 \\ -2x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((f \circ g) + f)(x) &= (f \circ g)(x) + f(x) \\ &= \begin{cases} 0 + 0, & x \geq 0 \\ 0 + (-2x), & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore (g \circ f) - f = (f \circ g) + f \rightarrow (\text{ข}) \text{ ถูก }$$

พิจารณา (ค)

$$\begin{aligned} f \circ (f \circ g)(x) &= f(f(g(x))) \\ &= f(0) = 0 \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= \begin{cases} 0 \cdot 2x = 0, & x \geq 0 \\ -2x \cdot 0 = 0, & x < 0 \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f \circ (f \circ g) = f \cdot g \rightarrow (\text{ค}) \text{ ถูก }$$

6. ตอบ 4

วิธีทำ

$$\sin \frac{17\pi}{7} = \sin(2\pi + \frac{3\pi}{7}) = \sin \frac{3\pi}{7}$$

$$\sin \frac{10\pi}{7} = \sin(\pi + \frac{3\pi}{7}) = -\sin \frac{3\pi}{7}$$

$$\therefore \arccos(\sin \frac{17\pi}{7}) - \arcsin(\sin \frac{10\pi}{7}) = \arccos(\sin \frac{3\pi}{7}) - \arcsin(-\sin \frac{3\pi}{7})$$

$$= \arccos(\sin \frac{3\pi}{7}) - \left[-\arcsin(\sin \frac{3\pi}{7}) \right], \arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$= \arcsin(\sin \frac{3\pi}{7}) + \arccos(\sin \frac{3\pi}{7})$$

$$= \frac{\pi}{2}, \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

* พยายามให้เปิดหนังสือเรียน Trigonometry หน้า 100 และ หน้า 105

ดูประกอบด้วยครับ สอนไว้ตรงเป๊ะเวอร์ *

7. ตอบ 1

วิธีทำ

$$\text{จาก } (x+y)3^{y-x} = \frac{2}{9} \quad \text{---(1)}$$

$$\text{จาก } 2\log_2(x+y) = x-y \rightarrow \log_2(x+y) = \frac{x-y}{2} \rightarrow x+y = 2^{\left(\frac{x-y}{2}\right)} \quad \text{---(2)}$$

$$\text{จาก (2) ใน (1) , } 2^{\left(\frac{x-y}{2}\right)} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-y}}{3^{x-y}} = \frac{2}{9}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

$$\text{จะได้ } x-y = 2 \quad \text{---(3)}$$

$$\text{แทน (3) ใน (2) , } x+y = 2^{\left(\frac{2}{2}\right)} \rightarrow x+y = 2 \quad \text{---(4)}$$

$$(3) + (4) , 2x = 4 \rightarrow x = 2 \quad \text{แทน } x = 2 \text{ ใน (3) จะได้ } y = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2^2 + 0^2 = 4$$

8. ตอบ 2

วิธีทำ

$$P : y = x^2 + 1$$

$$P : x^2 = y - 1 \text{ (พาราโบลา)}$$

จุดยอด คือ $(0, 1)$

เนื่องจาก B เป็นจุดบนพาราโบลา

$$\text{ดังนั้น } y \text{ ที่จุด } B = x^2 + 1$$

และจาก $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ จะได้ว่า $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$

$$\left(\frac{x^2}{x} \right) \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = -1 \rightarrow \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} = -1$$

$$x(x+2) = -1 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

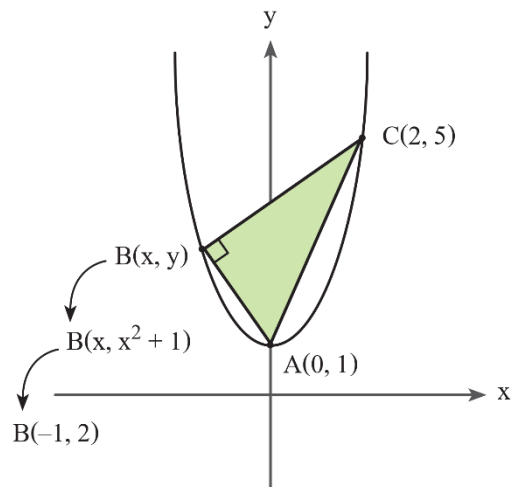
$$(x+1)^2 = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ จะได้ } B(-1, 2)$$

พิจารณา $\triangle ABC$:

$$AB \text{ (ฐาน)} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$BC \text{ (สูง)} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2}(\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 3 \text{ ตารางหน่วย}$$



9. ตอบ 1

วิธีทำ

$$a = \cos 50^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos 32.5^\circ \cos 17.5^\circ$$

$$b = \sin 50^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin 32.5^\circ \cos 17.5^\circ$$

$$\frac{b}{a} = \tan 32.5^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} &= \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ &= 1 + \frac{\frac{2ab}{a^2}}{\frac{a^2+b^2}{a^2}} \\ &= 1 + \frac{2\left(\frac{b}{a}\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{2 \tan 32.5^\circ}{1 + \tan^2 32.5^\circ} = 1 + \sin 2(32.5^\circ) = 1 + \sin 65^\circ \\ &= 1 + \cos 25^\circ \end{aligned}$$

10. ตอบ 3

วิธีทำ เส้นโค้งผ่าน $(0, 1)$ และ $(1, 1) \rightarrow f(0) = 1, f(1) = 1$

$$\text{ความชัน} = f'(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f'(0) = 1 \rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$f''(x) = 2ax + b \rightarrow f''(1) = 2 \rightarrow \boxed{2a + b = 2} \quad \text{---(1)}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + x + d$$

$$f(0) = 1 \rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$f(1) = 1 \rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 + 1 = 1 \rightarrow \boxed{2a + 3b = -6} \quad \text{---(2)}$$

$$(2) - (1), 2b = -8 \rightarrow \boxed{b = -4}$$

แทน $b = -4$ ใน (1), $a = 3$

$$\text{จะได้ } f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(3x-1)(x-1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}, 1$$

Max
Min

$$\therefore \text{ค่าสูงสุดสัมพัทธ์} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{31}{27}$$

11. ตอบ 5

วิธีทำ $P(\text{หยิบได้สีละ 1 ลูก}) = \frac{2}{5}$

$$\frac{n}{3n} \times \frac{n}{3n-1} \times \frac{n}{3n-2} \times 3! = \frac{2}{5}$$

$$5n^3 = n(3n-1)(3n-2) \quad \text{และ } n \neq 0$$

$$5n^2 = (3n-1)(3n-2)$$

$$5n^2 = 9n^2 - 9n + 2$$

$$0 = 4n^2 - 9n + 2$$

$$0 = (4n-1)(n-2) \quad \therefore n = \left(\frac{1}{4}\right), 2$$

ใช้ไม่ได้

ดังนั้น กล่องใบนี้มีลูกบอล 3 สีๆ ละ 2 ลูก

ทำให้ในการสุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูก จะมีเพียง 2 กรณีเท่านั้น คือ

1. ได้ 3 สีๆ ละ 1 ลูก
2. ได้ 2 สี โดยมี 1 สีที่มี 2 ลูก

$$\therefore P(\text{ได้ 2 สี}) = 1 - P(\text{ได้ 3 สี}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

12. ตอบ 2

วิธีทำ

ก. $\log_2 a < \log_2 b \rightarrow \boxed{a < b}$

ข. $\frac{2^b}{3^b} > \frac{2^d}{3^d} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^b > \left(\frac{2}{3}\right)^d$

$\therefore \boxed{b < d}$

ค. $3^a 2^a - 3^{2c} > 3^c 2^a - 3^c 3^a$

$$3^a 2^a - 3^{2c} - 3^c 2^a + 3^c 3^a > 0$$

$$2^a (3^a - 3^c) + 3^c (3^a - 3^c) > 0$$

$$(3^a - 3^c)(2^a + 3^c) > 0 \quad \text{และ} \quad 2^a + 3^c > 0 \quad \text{แน่ๆ}$$

$$3^a - 3^c > 0$$

$$3^a > 3^c \rightarrow \boxed{a > c}$$

จาก ก, ข และ ค จะได้ $c < a < b < d$

$\therefore b+d$ มีค่ามากที่สุด

13. ตอบ 3

วิธีทำ

ให้ ลูกอมรสนม มี x เม็ด เม็ดละ 5 บาท คิดเป็นเงิน $5x$ บาท

และ ลูกอมรสน้ำผึ้ง มี y เม็ด เม็ดละ 7 บาท คิดเป็นเงิน $7y$ บาท

รวมคิดเป็นเงิน $5x + 7y$

จากโจทย์เป็นเงินทั้งสิ้น 287 บาท

$$\therefore 5x + 7y = 287 \text{ โดย } x, y \in \mathbb{I}^+$$

เราพบว่า เมื่อ $y = 1 \rightarrow 5x + 7(1) = 287$

$$5x = 280 \rightarrow x = 56$$

แสดงว่า $x = 56, y = 1$ ทำให้ $5x + 7y = 287$

และยังมีคำตอบชุดอื่นๆ อีก ที่ทำให้ $5x + 7y = 287$

คือ $5x + 7y = 287$

$\begin{array}{c} 56 \\ -7 \\ 49 \\ -7 \\ 42 \\ -7 \\ \vdots \\ 7 \end{array}$	$\begin{array}{c} 1 \\ +5 \\ 6 \\ +5 \\ 11 \\ +5 \\ \vdots \\ 36 \end{array}$	$\rightarrow \text{รวม } x + y = \textcircled{57} \text{ MAX}$ $\rightarrow \text{รวม } x + y = 55$ $\rightarrow \text{รวม } x + y = 53$ $\vdots$ $\rightarrow \text{รวม } x + y = \textcircled{43} \text{ MIN}$
--	---	--

โดยจะมีทั้งหมด 8 ชุด (พิจารณาจาก) $56, 49, 42, \dots, 7$

$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$7 \cdot \underline{8}$	$7 \cdot \underline{7}$	$7 \cdot \underline{6}$	$7 \cdot \underline{1}$

ดังนั้น (ก) ผิด

และมีจำนวนลูกอมทั้งสองรสอย่างน้อย 43 เม็ด (ข) ถูก

และมีจำนวนลูกอมทั้งสองรส มีจำนวนมากที่สุด 57 เม็ด (ค) ถูก

14. ตอบ 3

วิธีทำ

$$C : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\text{จุดศูนย์กลาง } (h, k) = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{1} \right)$$

$$\therefore (h, k) = (2, 1)$$

จากรูป จุดที่สัมผัสแกน y คือ จุด $P(0, 1)$

L เป็นเส้นตรงที่ขนานกับ $\ell : 2x - 2y = 1$

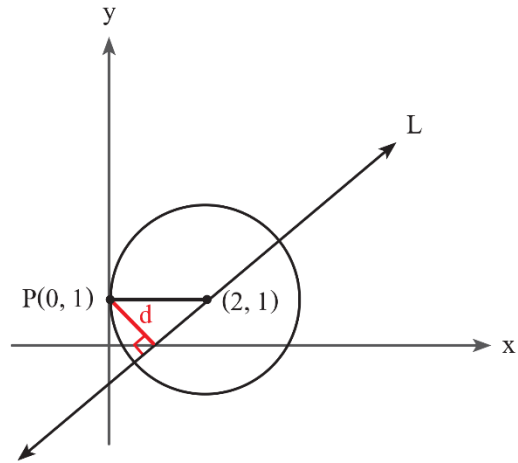
และผ่านจุด $(2, 1)$

$$\text{ดังนั้น } m_L = m_\ell \rightarrow m_L = \left(\frac{-2}{-2} \right) = 1$$

$$\text{จะได้ } L : \underset{2}{x} - \underset{1}{y} - 1 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } d(P; L) = \frac{|0 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{ระยะห่างระหว่างจุด P กับเส้นตรง L เท่ากับ } \sqrt{2}$$



15. ตอบ 4

วิธีทำ

$$\text{จากโจทย์ } C = 30^\circ \text{ ดังนั้น } A + B = 150^\circ \rightarrow A = 150^\circ - B$$

$$\text{จากกฎของ sin } \rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\text{โจทย์กำหนด } b = a(\sqrt{3} - 1) \rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{3} - 1 \rightarrow \frac{\sin B}{\sin A} = \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{\sin B}{\sin A} = (\sqrt{3} - 1) \frac{(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} + 1)} \rightarrow (\sqrt{3} + 1) \sin B = 2 \sin A$$

$$(\sqrt{3} + 1) \sin B = 2 \sin(150^\circ - B) \rightarrow (\sqrt{3} + 1) \sin B = 2(\sin 150^\circ \cos B - \cos 150^\circ \sin B)$$

$$\sqrt{3} \sin B + \sin B = \cos B + \sqrt{3} \sin B \rightarrow \sin B = \cos B \rightarrow B = 45^\circ$$

$$\therefore \sin 3B = \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

16. **ตอบ 5**

วิธีทำ

$$H : x^2 - 3y^2 - 3 = 0$$

$$H : x^2 - 3y^2 = 3$$

$$H : \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$$

เป็นไฮเพอร์โบลาลู่ x

มีจุดศูนย์กลาง คือ (0, 0)

$$\text{มี } a_H^2 = 3 \text{ และ } b_H^2 = 1$$

จากความสัมพันธ์ระหว่าง a_H , b_H และ c_H

$$c_H^2 = a_H^2 + b_H^2 \rightarrow c_H^2 = 3 + 1 \quad \therefore c_H = 2 \text{ ทำให้ได้ว่า จุดโฟกัส F คือ } (2, 0)$$

พิจารณาวงรี : วงรีมีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) และโฟกัสอยู่ที่จุด F(2, 0)

และอยู่ทางซ้ายของจุดศูนย์กลางวงรี ดังนั้นวงรีจะเป็นวงรีไขว้นอน และมีลักษณะ ดังรูป

จากรูป $a = c + 2 \rightarrow c = a - 2$

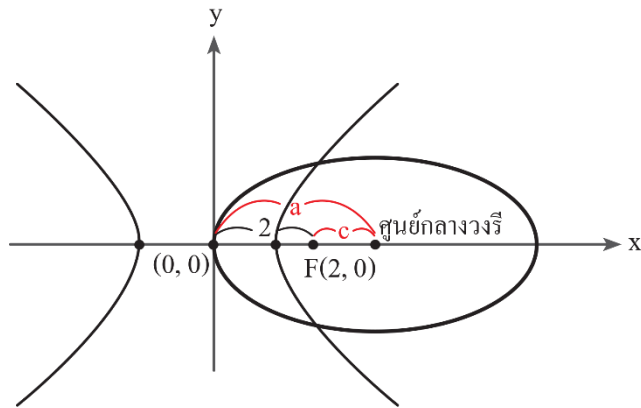
จากโจทย์ $2a - 2b = 2 \rightarrow a - b = 1 \rightarrow b = a - 1$

และจากความสัมพันธ์ระหว่าง a, b และ c

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = (a - 1)^2 + (a - 2)^2 \rightarrow a^2 = a^2 - 2a + 1 + a^2 - 4a + 4$$

$$0 = a^2 - 6a + 5 \rightarrow (a - 5)(a - 1) = 0 \rightarrow a = \cancel{1}, 5 \quad \therefore a = 5 \text{ และ } c = 3$$

$$\therefore \text{ความเยื้องศูนย์กลาง (e)} = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$$



17. **ตอบ 3**

วิธีทำ จาก $CA = AB \rightarrow CAA^{-1} = ABA^{-1} \rightarrow C = ABA^{-1}$

$$C^2 = (ABA^{-1})(ABA^{-1}) = AB^2A^{-1} = A \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A^{-1}$$

$$C^2 = A \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} A^{-1} = A(4I)A^{-1} = 4AA^{-1} = 4I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C^2 + xB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2x & 0 \\ 0 & 4+2x \end{bmatrix}$$

$$\det(C^2 + xB) = (4-2x)(4+2x) = 16-4x^2$$

จากโจทย์ $\det(C^2 + xB) = -20$

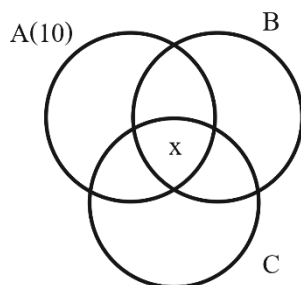
$$16-4x^2 = -20$$

$$4x^2 = 36 \rightarrow x = 3, \quad \text{ใช้ไม่ได้} \quad (-3)$$

$$\therefore x^2 + x + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

18. **ตอบ 5**

วิธีทำ



ให้ $n(A \cap B \cap C) = x$

จาก $n(A \cup B \cup C)$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$18 = 10 + n(B) + n(C) - 4 - 3 - n(B \cap C) + x$$

$$15 = \underbrace{n(B) + n(C) - n(B \cap C)}_{n(B \cup C)} + x$$

$$15 - x = n(B \cup C)$$

$n(B \cup C)$ จะมากที่สุดเมื่อ x มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งมีค่าน้อยที่สุดเท่ากับศูนย์

ดังนั้น $n(B \cup C)$ มากสุด $= 15 - 0 = 15$

19. ตอบ 2

วิธีทำ

จากโจทย์ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad \text{--- (1)}$

จาก (1), $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |-\vec{c}|$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\therefore |\vec{c}|^2 = 7 \rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{7}$$

จาก (1), $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$

$$|\vec{b} + \vec{c}| = |-\vec{a}|$$

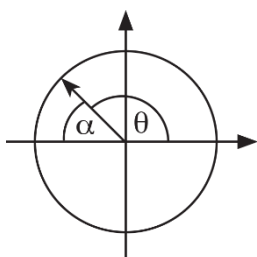
$$|\vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a}|$$

$$|\vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$|\vec{b}|^2 + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \theta + |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7} \cdot \cos \theta + 7 = 2^2$$



$$\cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{7}} \quad \text{จะได้ } \theta \in Q_2 \text{ ดังรูป}$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \theta)$$

$$= \sin \theta^{**}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{7}}$$

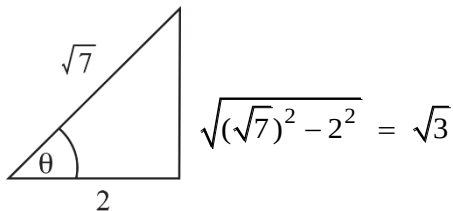
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

จากรูป

$$\theta = \pi - \alpha$$

$$= \pi - \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

****** เมื่อ $\cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{7}}$



เมื่อ $\theta \in Q_2$ จะได้ $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

20. **ตอบ 4**

วิธีทำ

ให้ $z = a + bi$

$$|z+1| = |z+i| \rightarrow |a+bi+1| = |a+bi+i| \rightarrow |(a+1)+bi| = |a+(b+1)i|$$

$$|(a+1)+bi|^2 = |a+(b+1)i|^2 \rightarrow (a+1)^2 + b^2 = a^2 + (b+1)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 + b^2 + 2b + 1 \rightarrow a = b \text{ ดังนั้น } z = a + bi = a + ai$$

$$|z-2+i| = |z+2-2i| \rightarrow |a+ai-2+i| = |a+ai+2-2i|$$

$$|(a-2)+(a+1)i| = |(a+2)+(a-2)i|$$

$$|(a-2)+(a+1)i|^2 = |(a+2)+(a-2)i|^2$$

$$(a-2)^2 + (a+1)^2 = (a+2)^2 + (a-2)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + 4a + 4 \rightarrow a = -\frac{3}{2} \rightarrow z = a + ai = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\therefore |2z|^2 = \left|2\left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right)\right|^2 = |-3-3i|^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 18$$

21. ตอบ 4

วิธีทำ

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็น G.S สมมติให้อัตราส่วนร่วมเป็น r

จากโจทย์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 243 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots = 243 \rightarrow \frac{a_1}{1-r} = 243 \quad \text{--- (1)}$

$$S_5 = 275 \rightarrow \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = 275 \rightarrow 243(1-r^5) = 275$$

$$1-r^5 = \frac{275}{243} \rightarrow r^5 = 1 - \frac{275}{243} = r^5 = -\frac{32}{243}$$

$$r^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \rightarrow r = -\frac{2}{3} \quad \text{นำ } r \text{ แทนลงใน (1) จะได้ } a_1 = 405$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 r^{n-1}}{2^{n-1}} = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \\ &= 405 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 405 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots\right) \\ &= 405 \left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \right) = 405 \left(\frac{3}{4} \right) \\ &= 303.75 \end{aligned}$$

22. ตอบ 2

วิธีทำ จาก $y = f(x)$ ผ่าน $(2, 2) \rightarrow f(2) = 2$

จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(1, 3) \rightarrow f'(1) = 0, f(1) = 3$

จาก $f'(1) = 0$ แสดงว่า $f'(x)$ มี $x-1$ เป็นตัวประกอบ

สมมติ $f'(x) = A(x-1) = Ax - A$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{Ax^2}{2} - Ax + C$$

$$f(2) = 2 \rightarrow 2A - 2A + C = 2 \rightarrow \boxed{C = 2}$$

$$f(1) = 3 \rightarrow \frac{A}{2} - A + 2 = 3 \rightarrow \boxed{A = -2}$$

จะได้ $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

$$\therefore \int_{-1}^2 f(x)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \Big|_{-1}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 2\right) = 6$$

23. ตอบ 4

วิธีทำ

จากโจทย์ $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1^2$$

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$

$$|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta + |\vec{b}|^2 = 1$$

$$1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta + 1^2 = 1$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $\theta \in Q_2$ และ $\theta = 120^\circ$ ซึ่ง $\sin \theta = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

24. ตอบ 3

วิธีทำ

จากโจทย์ $Q_1 = 54.5$ จะได้ว่า Q_1 อยู่ในช่วงคะแนน 50 – 59

$$\text{และจาก } Q_1 = L + I \left(\frac{\frac{N}{4} - \Sigma f_L}{f_{Q_1}} \right)$$

$$54.5 = 49.5 + 10 \left(\frac{\frac{N}{4} - (2 + 5)}{8} \right)$$

$$N = 44$$

25. ตอบ 2

วิธีทำ

ข้อมูลจากโจทย์ ลบ 2 ทุกตัว $\sigma^2 = 320$ (เท่าเดิม) หาร d ทุกตัว $\sigma^2 = \frac{320}{d^2}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right.$	$2, 2+d, 2+2d, 2+3d, \dots, 2+30d$ $0, d, 2d, 3d, \dots, 30d$ $0, 1, 2, 3, \dots, 30$
--	---	---

โดยข้อมูลชุดนี้มี $\mu = \frac{0+1+2+3+\dots+30}{31}$

$$= \frac{0 + \frac{30}{2}(30+1)}{31} = 15$$

$$\begin{aligned}\text{จาก } \sigma^2 &= \frac{\sum x^2}{N} - \mu^2 \\ \frac{320}{d^2} &= \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 30^2}{31} - 15^2 \\ \frac{320}{d^2} &= \frac{0 + \frac{30}{6}(30+1)(2 \cdot 30 + 1)}{31} - 225 \\ d^2 &= 4 \rightarrow d = 2, \text{ ~~2~~}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } & \begin{array}{ccccccccc} 2 & , & 2+d & , & 2+2d & , & 2+3d & , & \dots & , & 2+30d \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 2 & , & 4 & , & 6 & , & 8 & , & \dots & , & 62 \end{array} \\ \therefore \mu &= \frac{2+62}{2} = 32 \text{ (ข้อมูลกระโดดคงที่ ค่าเฉลี่ย } (\mu) = \frac{\text{ตัวแรก} + \text{ตัวสุดท้าย}}{2} \text{)}\end{aligned}$$

26. ตอบ 1

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ จาก } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2h^3 + (6x+1)h^2 + 2x(3x+1)h}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} [2h^2 + (6x+1)h + 2x(3x+1)] \\ f'(x) &= 2x(3x+1) = 6x^2 + 2x\end{aligned}$$

$$\text{ให้ } f'(x) = 0 \text{ จะได้ } 2x(3x+1) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}, 0$$

Max Min

$$\text{จากโจทย์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์} = 4 \rightarrow f(0) = 4$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (6x^2 + 2x)dx = 2x^3 + x^2 + c$$

$$f(0) = 4 \rightarrow c = 4 \text{ ดังนั้น } f(x) = 2x^3 + x^2 + 4$$

$$\therefore f(2) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 24 + 4 = 28$$

27. ตอบ 1

วิธีทำ

$$\text{จากโจทย์} \quad f(n) = \begin{cases} f(n-2) + 2n, & n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ f(n+1) - n, & n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } n = 5, \quad f(5) &= f(3) + 2 \cdot 5 \rightarrow f(3) = f(5) - 10 \\ &= 16 - 10 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } n = 3, \quad f(3) &= f(1) + 2 \cdot 3 \rightarrow f(1) = f(3) - 6 \\ &= 6 - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } n = 1, \quad f(1) &= f(-1) + 2 \cdot 1 \rightarrow f(-1) = f(1) - 2 \\ &= 0 - 2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } n = -1, \quad f(-1) &= f(-3) + 2(-1) \rightarrow f(-3) = f(-1) + 2 \\ &= (-2) + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } n = 2, \quad f(2) = f(3) - 2 \rightarrow f(2) = 6 - 2 = 4$$

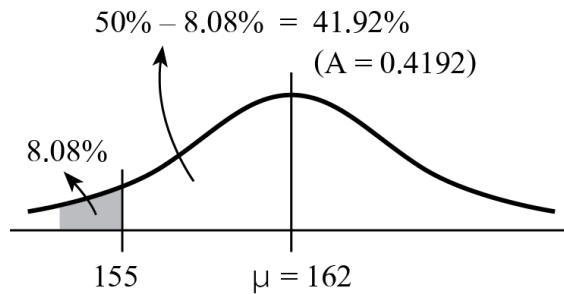
$$\text{เมื่อ } n = 0, \quad f(0) = f(1) - 0 \rightarrow f(0) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{เมื่อ } n = -2, \quad f(-2) = f(-1) - (-2) \rightarrow f(-2) = (-2) + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=-3}^3 f(n) &= f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ &= 0 + 0 + (-2) + 0 + 0 + 4 + 6 = 8 \end{aligned}$$

28. ตอบ 4

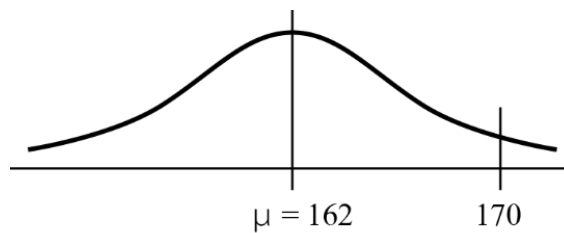
วิธีทำ



จากตาราง $A = 0.4192 \rightarrow Z = 1.40$

ดังนั้น $X = 155 \rightarrow Z = -1.40$

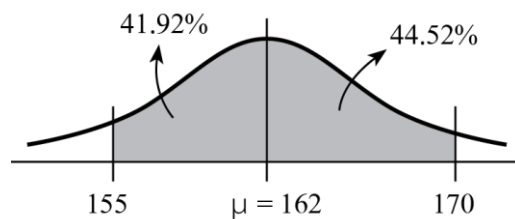
$$\text{จาก } Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow -1.40 = \frac{155 - 162}{\sigma} \rightarrow \sigma = 5$$



$$\text{เมื่อ } x = 170, Z = \frac{170 - 162}{5} = 1.6$$

จากตาราง $Z = 1.6 \rightarrow A = 0.4452 (44.52\%)$

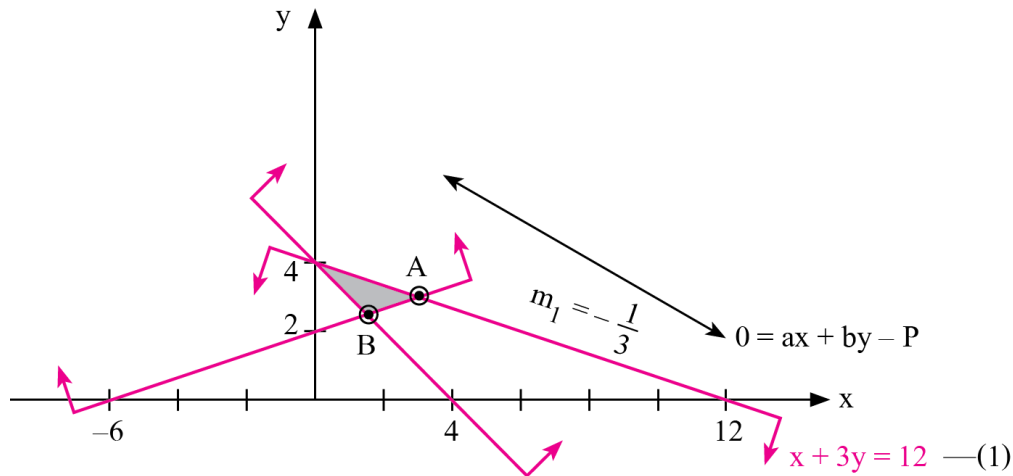
ดังนั้น



$\therefore$ นักเรียนมีความสูงในช่วง $155 - 170 = 41.92\% + 44.52\% = 86.44\%$

29. ตอบ 3

วิธีทำ



เมื่อ $0 < a < b \leq 2a$ และ $P = ax + by$

จะได้ $0 = ax + by - P$ และ $m_p = -\frac{a}{b}$

เช่น $a = 1, b = 2$

$$\therefore m_p = -\frac{1}{2}$$

จากกราฟ พบว่า กรณีสมมติ $a = 1, b = 2$ ซึ่ง $0 < a < b \leq 2a$ ได้ $m_p = -\frac{1}{2}$

เราพบว่า เส้นตรง $0 = ax + by - P$ จะชันกว่าเส้นตรงที่ (1) $x + 3y = 12$

เพราะ $m_p = -\frac{1}{2}$ และ $m_1 = -\frac{1}{3}$

และเมื่อสไลด์เส้นตรง $0 = ax + by - P$ ลงมาหาพื้นที่แรเงา พบว่า

จะโดน A เป็นจุดแรก และ B เป็นจุดสุดท้าย

แก้จุด A จาก $x + 3y = 12$ และ $3y - x = 6$ ได้

จุด A มีพิกัด (3, 3)

แก้จุด B จาก $x + y = 4$ และ $3y - x = 6$ ได้

จุด B มีพิกัด (1.5, 2.5)

$$P(3, 3) = a(3) + b(3) = 3a + 3b$$

$$P(1.5, 2.5) = a(1.5) + b(2.5) = 1.5a + 2.5b$$

เมื่อ $0 < a < b$ แสดงว่า $a, b \in \mathbb{R}^+$

ดังนั้น $P(3, 3) = P_{\text{Max}}$
 $3a + 3b = 15 \quad \text{--- (1)}$

และ $P(1.5, 2.5) = P_{\text{Min}}$
 $1.5a + 2.5b = 10.5 \quad \text{--- (2)}$

แก้ (1), (2) ได้ $a = 2, b = 3$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$$

30. ตอบ 2

วิธีทำ

ให้เงินออมเป็น x (หน่วยเป็นพันบาท) และเงินเดือนเป็น y (หน่วยเป็นหมื่นบาท)

จากโจทย์ $x = 1$ (1,000 บาท) ประมาณได้ $y = 2.6$ (26,000 บาท)

และจากความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง

จะได้ $y = mx + c$

แทน $x = 1, y = 2.6 \rightarrow 2.6 = m(1) + c$
 $2.6 = m + c \quad \text{--- (1)}$

จาก $y = mx + c \rightarrow \Sigma y = m \Sigma x + N \cdot C$
 $\rightarrow \frac{\Sigma y}{N} = \frac{m \Sigma x}{N} + \frac{N \cdot C}{N}$
 $\mu_y = m \mu_x + C$

จากโจทย์ $\mu_x = 2$ (2,000 บาท) และ $\mu_y = 6.4$ (64,000 บาท)

$$6.4 = m(2) + c$$

$$6.4 = 2m + c \quad \text{--- (2)}$$

$$(2) - (1), \quad 3.8 = m$$

แทน $m = 3.8$ ใน (1) ได้ $c = -1.2$

$$\therefore y = 3.8x - 1.2$$

แทน $x = 1.5$ (1,500 บาท) ลงไป

$$y = 3.8(1.5) - 1.2$$

$$= 4.5$$

31. ตอบ 34

วิธีทำ

$$\text{ให้ } y = \sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} \text{ จะได้ } \frac{1}{y} = \sqrt{\frac{x-2}{2x+3}}$$

$$\text{ดังนั้น } y + 3 \cdot \frac{1}{y} = 4$$

คูณ y ตลอด

$$y^2 + 3 = 4y$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$(y-1)(y-3) = 0$$

$$\therefore y = 1, 3$$

$$\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} = 1$$

$$\frac{2x+3}{x-2} = 1$$

$$2x+3 = x-2$$

$$x = -5$$

ตรวจสอบคำตอบแล้วพบว่า $x = -5$ ใช้ได้

$$\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}} = 3$$

$$\frac{2x+3}{x-2} = 9$$

$$2x+3 = 9x-18$$

$$21 = 7x$$

$$x = 3$$

ตรวจสอบคำตอบแล้วพบว่า $x = 3$ ใช้ได้

$$\text{ดังนั้น } A = \{-5, 3\}$$

$$a = -5 \text{ และ } b = 3$$

$$a^2 + b^2 = 25 + 9 = 34$$

32. ตอบ 5,460

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 หาจำนวนวิธีเลือกกรรมการ โดยไม่สนใจเงื่อนไขของ ก กับ ข

กรณีที่ 1 ชาย 2 , หญิง 4 ทำได้ $\binom{10}{2}\binom{7}{4} = 1,575$ วิธี

กรณีที่ 2 ชาย 3 , หญิง 3 ทำได้ $\binom{10}{3}\binom{7}{3} = 4,200$ วิธี

$\therefore$ รวม 2 กรณี = 5,775 วิธี

ขั้นที่ 2 หาจำนวนวิธีที่ ก และ ข เป็นกรรมการพร้อมกัน

กรณีที่ 1 ชาย 2 , หญิง 4 ทำได้ $\binom{8}{0}\binom{7}{4} = 35$

กรณีที่ 2 ชาย 3 , หญิง 3 ทำได้ $\binom{8}{1}\binom{7}{3} = 280$

$\therefore$ รวม 2 กรณี = 315 วิธี

$\therefore$ จำนวนวิธีที่ ก และ ข เป็นกรรมการพร้อมกันไม่ได้ = $5,775 - 315 = 5,460$ วิธี

33. ตอบ 59

วิธีทำ

$$S_n = 3n^2 + 2n \text{ จะได้ว่า } a_n = 6n - 1 \rightarrow a_{2^k} = 6(2^k) - 1$$

$$m = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}}$$

$$m = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^k} a_{2^k} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^k} [6(2^k) - 1]$$

$$m = \sum_{k=1}^{10} \left(6 - \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{10} 6 - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^k}$$

$$m = 60 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$m = 60 - \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$m = 60 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 59 + \frac{1}{1024}$$

$\therefore$ จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่า m คือ 59

34. ตอบ 20

วิธีทำ

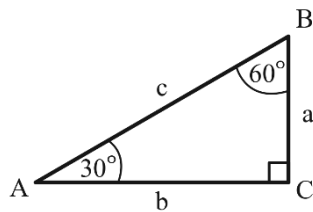
จากโจทย์ $2 \cos 2A - 8 \sin A + 3 = 0 \rightarrow 2(1 - 2 \sin^2 A) - 8 \sin A + 3 = 0$

$4 \sin^2 A + 8 \sin A - 5 = 0 \rightarrow (2 \sin A - 1)(2 \sin A + 5) = 0$

$\sin A = \frac{1}{2}, \left(-\frac{5}{2}\right)$ ใช้ไม่ได้ เพราะ $-1 \leq \sin A \leq 1$

$A = 30^\circ$ และโจทย์กำหนด $C = 90^\circ$ ดังนั้น $B = 60^\circ$

วาดรูปตามโจทย์



จากรูป $\frac{c}{a} = \csc 30^\circ = 2 \rightarrow c = 2a$

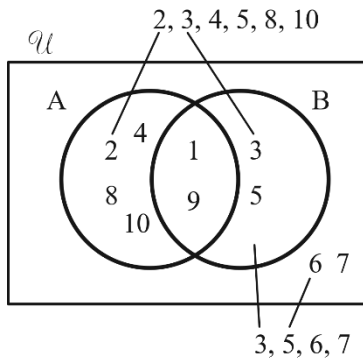
$\frac{b}{a} = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \rightarrow b = \sqrt{3}a$

โจทย์กำหนด $a + c = 30$ แต่ $c = 2a$ ดังนั้น $a + 2a = 30 \rightarrow a = 10$

$$\begin{aligned}
 \therefore a \sin A + b \sin B &= a \sin 30^\circ + \sqrt{3}a \sin 60^\circ = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}a \\
 &= 2a = 2(10) = 20
 \end{aligned}$$

35. **ตอบ** 24

วิธีทำ



จากโจทย์ $A \cap B = \{1, 9\}$

จาก $U - A = \{3, 5, 6, 7\}$

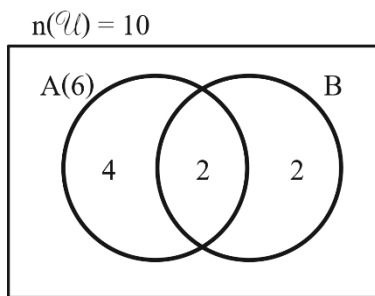
จะได้ $A' = \{3, 5, 6, 7\}$

และ $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$

จากแผนภาพจะได้ว่า $n(A) = 6$, $n(B) = 4$

$$\therefore n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 6 \cdot 4 = 24$$

วิธีที่ 2 มองเป็นจำนวนสมาชิก



จากโจทย์ $A \cap B = \{1, 9\}$ จะได้ $n(A \cap B) = 2$

จาก $U - A = \{3, 5, 6, 7\}$

จะได้ $A' = \{3, 5, 6, 7\}$ ดังนั้น $n(A') = 4$

จาก $n(A) + n(A') = n(U)$

ดังนั้น $n(A) = 6$

จาก $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$

ดังนั้น $n[(A - B) \cup (B - A)] = 6$

จากแผนภาพ จะได้ว่า $n(A) = 6$ และ $n(B) = 4$

$$\therefore n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 6 \cdot 4 = 24$$

36. ตอบ 4.5

วิธีทำ

$$\text{จาก } f \circ g^{-1}(x) = 2$$

$$f(g^{-1}(x)) = 2$$

$$g^{-1}(x) = f^{-1}(2)$$

$$x = g(f^{-1}(2)) \text{ — (1)}$$

หา $f^{-1}(2)$

$$\text{Trick } 2 = \begin{cases} x - 2, & x \leq 4 \\ \underline{3x - 10}, & x > 4 \end{cases}$$

เพราะเมื่อ $x > 4$

$$3x - 10 > 2 \text{ แน่}$$

$$2 = x - 2$$

$$x = 4 \text{ โดยสอดคล้องกับ } x \leq 4$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 4$$

$$\text{จาก (1) } \therefore x = g(4) = \frac{1}{2}(4 + 5) = 4.5$$

37. ตอบ 9

วิธีทำ $(\log_3 9 + \log_3 x)^2 - 3 \log_{\frac{1}{3^2}} x - 7 = 0$

$$(2 + \log_3 x)^2 - 6 \log_3 x - 7 = 0$$

$$(4 + 4 \log_3 x + (\log_3 x)^2) - 6 \log_3 x - 7 = 0$$

$$(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 = 0$$

$$(\log_3 x - 3)(\log_3 x + 1) = 0$$

$$\log_3 x = 3, -1$$

$$x = 3^3, 3^{-1}$$

$$x = 27, \frac{1}{3} \text{ ตรวจสอบคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่}$$

$$\text{ดังนั้น } A = \left\{ 27, \frac{1}{3} \right\}$$

$$\therefore \text{ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดใน } A \text{ คือ } 27 \times \frac{1}{3} = 9$$

38. ตอบ 2

วิธีทำ

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \text{ เมื่อ } f = g$$

$$\text{เพราะจะได้ } (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = (f \circ f)(x)$$

$$\text{จาก } f(x) = x^2 - x + a \text{ และ}$$

$$g(x) = x^2 + bx$$

$$\text{พบว่า } f = g \text{ เมื่อ } b = -1 \text{ และ } a = 0$$

$$\text{โดยจะได้ว่า } f(x) = g(x) = x^2 - x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(b) + g(a) &= f(-1) + g(0) \\ &= (-1)^2 - (-1) + (0)^2 - (0) \\ &= 1 + 1 + 0 - 0 = 2 \end{aligned}$$

39. ตอบ 12

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+\sqrt{1+x}}}{\sqrt[3]{8+x}-2} \times \frac{[(\sqrt[3]{8+x})^2 + (\sqrt[3]{8+x})(2) + 2^2]}{[(\sqrt[3]{8+x})^2 + (\sqrt[3]{8+x})(2) + 2^2]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+\sqrt{1+x}} \times [(\sqrt[3]{8+x})^2 + (\sqrt[3]{8+x})(2) + 4]}{(\sqrt[3]{8+x})^3 - 2^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+\sqrt{1+x}} [(\sqrt[3]{8+x})^2 + (\sqrt[3]{8+x})(2) + 4]$$

$$= (1)[2^2 + (2)(2) + 4] = 12$$

40. ตอบ 84

วิธีทำ

โจทย์กำหนด a, b, c เป็น G.S สมมติให้อัตราส่วนร่วมเป็น r

จะได้ว่า $a = \frac{b}{r}$ และ $c = br$

จากโจทย์ a, b+3, c+4 เป็น A.S

จะได้ว่า $a + (c+4) = 2(b+3)$

$$a + c = 2b + 2$$

$$14 - b = 2b + 2, \boxed{a + b + c = 14 \rightarrow a + c = 14 - b}$$

$$b = 4$$

จาก $a + b + c = 14 \rightarrow \frac{b}{r} + b + br = 14 \rightarrow \frac{4}{r} + 4 + 4r = 14$

$$4 + 4r^2 = 10r \rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \rightarrow (2r-1)(r-2) = 0 \rightarrow r = \frac{1}{2}, 2$$

กรณีที่ 1 $r = \frac{1}{2}$ จะได้ a, b, c คือ 8, 4, 2

กรณีที่ 2 $r = 2$ จะได้ a, b, c คือ 2, 4, 8

จากทั้ง 2 กรณี จะได้ว่า $a^2 + b^2 + c^2 = \begin{cases} 8^2 + 4^2 + 2^2 = 84 \\ 2^2 + 4^2 + 8^2 = 84 \end{cases}$

41. ตอบ 60

วิธีทำ

นำข้อมูลทุกตัว และ μ ไปลบออก 3 จะได้

คะแนน (x)	จำนวนนักเรียน (f)	$f \cdot x$
-3	$a - 2$	$-3a + 6$
-2	a	$-2a$
-1	a^2	$-a^2$
0	$(a+1)^2$	0
1	$2a$	$2a$
2	$a + 1$	$2a + 2$
	$2a^2 + 7a$	$-a^2 - a + 8$

$\downarrow$ N $\downarrow$ $\Sigma f \cdot x$

$$\begin{aligned} \text{และ } \mu &= 2.8 - 3 \\ &= -0.2 \end{aligned}$$

จาก
$$\mu = \frac{\Sigma f \cdot x}{N}$$

$$-0.2 = \frac{-a^2 - a + 8}{2a^2 + 7a}$$

นำ -1 คูณ
$$0.2 = \frac{a^2 + a - 8}{2a^2 + 7a}$$

$$\frac{1}{5} \curvearrowright \frac{a^2 + a - 8}{2a^2 + 7a}$$

$$2a^2 + 7a = 5a^2 + 5a - 40$$

$$0 = 3a^2 - 2a - 40$$

$$0 = (3a + 10)(a - 4)$$

$$\therefore a = \cancel{-\frac{10}{3}}, 4 \quad (a \in I^+)$$

ดังนั้น
$$N = 2(4)^2 + 7(4) = 60$$

42. ตอบ 76

วิธีทำ f : ต่อเนื่องที่ $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a(0) + b(0) + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (4x + c) = c \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \therefore c = 4$$

ขณะ $x = 3$, $f(x) = ax^2 + bx + 4 \rightarrow f'(x) = 2ax + b$

จาก $f'(3) + f(3) = 45 \rightarrow (6a + b) + (9a + 3b + 4) = 45$

$$15a + 4b = 41 \quad \text{--- (1)}$$

จาก $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{2} \rightarrow \int_0^1 (ax^2 + bx + 4) dx = \frac{9}{2}$

$$\left. \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 4x \right|_0^1 = \frac{9}{2} \rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 4 = \frac{9}{2} \rightarrow 2a + 3b = 3 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times 3, 45a + 12b = 123 \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) \times 4, 8a + 12b = 12 \quad \text{--- (4)}$$

$$(3) - (4), 37a = 111 \rightarrow a = 3$$

แทน $a = 3$ ใน (2), $b = -1$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 4 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 4x + 4 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(a) = f(3) = 3(9) - 3 + 4 = 28$$

$$f(b) = f(-1) = -4 + 4 = 0$$

$$f(c) = f(4) = 3(16) - 4 + 4 = 48$$

$$f(a) + f(b) + f(c) = 28 + 0 + 48 = 76$$

43. **ตอบ** 2498

วิธีทำ

จาก $g(x) = x + 4$

Inv $x = y + 4$

$y = x - 4$

$\therefore g^{-1}(x) = x - 4$

จะได้ $h(x) = \begin{cases} 5x + 3, & x \in A \\ x - 4, & x \notin A \end{cases}, A = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$

สังเกตได้ว่าสมาชิกของ A คือ จำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

$h(100) = 5(100) + 3 = 503$

$\rightarrow$ 100 หารด้วย 3 เหลือเศษ 1 $\therefore 100 \in A$

$h(h(100)) = h(503) = 503 - 4 = 499$

$\rightarrow$ 503 หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 $\therefore 503 \notin A$

$h(h(h(100))) = h(499) = 5(499) + 3 = 2498$

$\rightarrow$ 499 หารด้วย 3 เหลือเศษ 1 $\therefore 499 \in A$

44. **ตอบ** 24

วิธีทำ

ให้ทั้งหมดมี x ลูก แดง 30% เขียว 20% จะได้เหลือ $100\% - 30\% - 20\% = 50\%$

ดังนั้นเหลือ $\frac{x}{2}$ ลูก เพิ่มเหลือไป 20 ลูก เหลือจะเพิ่มเป็น 60%

$$\frac{x}{2} + 20 = \left(\frac{60}{100}\right) \cdot (x + 20)$$

$$\frac{x}{2} + 20 = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot x + 12$$

$$8 = \frac{x}{10}$$

$$x = 80$$

แดงมี 30% จะมี $\left(\frac{30}{100}\right) \cdot 80 = 24$ ลูก

45. **ตอบ** 23

วิธีทำ จาก $AB = C \rightarrow A^{-1}ABC^{-1} = A^{-1}CC^{-1} \rightarrow \boxed{BC^{-1} = A^{-1}} \text{ ---(1)}$

$$\text{จาก } C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากสูตรลัด

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

$$\text{จาก } A \begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4a+1 \\ 5b+2 \\ 4c+3 \end{bmatrix} = BC^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & b & 2 \\ -1 & 3 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3a & -4 & -1 \\ 9 & -2b & 2 \\ -3 & -6 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+5 \\ 4b+15 \\ 3c+9 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } 4a+1 = 3a+5 \rightarrow a = 4$$

$$5b+2 = 4b+15 \rightarrow b = 13$$

$$4c+3 = 3c+9 \rightarrow c = 6$$

$$\therefore a+b+c = 4+13+6 = 23$$