

## ติว PAT 1 และคณิตศาสตร์ 1 วิชาสามัญ เฉลยโจทย์ในเอกสารประกอบการเรียน

### ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียลและลอการิทึม

ข้อ 1 ตอบ 4

ข้อ 2 ตอบ 5

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_2 100} + \frac{1}{\log_5 100} &= \log_{100} 2 + \log_{100} 5 = \log_{100}(2 \times 5) \\ &= \log_{10^2} 10 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ข้อ 3 ตอบ 2

ข้อ 4 ตอบ 2

$$(2^2)^{|3x-1|} - 16 = 6(2^{|3x-1|}), \text{ ให้ } A = 2^{|3x-1|}$$

$$\text{จะได้ } A^2 - 6A - 16 = 0$$

$$(A - 8)(A + 2) = 0$$

$$A = 8, -2$$

$$2^{|3x-1|} = 8, \text{ } \textcircled{-2} \text{ ใช้ไม่ได้}$$

$$|3x - 1| = 3$$

$$3x - 1 = 3, -3$$

$$3x = 4, -2$$

$$x = \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ผลบวกคำตอบ} = \frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

ข้อ 5 ตอบ 3

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \log_{a^2b} \left( \frac{c}{a} \right)} + \frac{1}{1 + \log_{b^2c} \left( \frac{a}{b} \right)} + \frac{1}{1 + \log_{c^2a} \left( \frac{b}{c} \right)} \\ &= \frac{1}{\log_{a^2b} (a^2b) + \log_{a^2b} \left( \frac{c}{a} \right)} + \frac{1}{\log_{b^2c} (b^2c) + \log_{b^2c} \left( \frac{a}{b} \right)} + \frac{1}{\log_{c^2a} (c^2a) + \log_{c^2a} \left( \frac{b}{c} \right)} \\ &= \frac{1}{\log_{a^2b} (abc)} + \frac{1}{\log_{b^2c} (abc)} + \frac{1}{\log_{c^2a} (abc)} \\ &= \log_{abc} (a^2b) + \log_{abc} (b^2c) + \log_{abc} (c^2a) = \log_{abc} (abc)^3 = 3 \end{aligned}$$

ข้อ 6 ตอบ 9

$$\begin{aligned} & (\log_3 9 + \log_3 x)^2 - 3 \log_{\frac{1}{3^2}} x - 7 = 0 \\ & (2 + \log_3 x)^2 - 6 \log_3 x - 7 = 0 \\ & (4 + 4 \log_3 x + (\log_3 x)^2) - 6 \log_3 x - 7 = 0 \\ & (\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 = 0 \\ & (\log_3 x - 3)(\log_3 x + 1) = 0 \\ & \log_3 x = 3, -1 \\ & x = 3^3, 3^{-1} \\ & x = 27, \frac{1}{3} \text{ ตรวจสอบคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่} \\ & \text{ดังนั้น } A = \left\{ 27, \frac{1}{3} \right\} \\ & \therefore \text{ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดใน } A \text{ คือ } 27 \times \frac{1}{3} = 9 \end{aligned}$$

ข้อ 7 ตอบ 1

ข้อ 8 ตอบ 125

ให้  $A = 2^x, B = \log_5 y$

จาก  $2^x \log_5 y = 4 \log_{5^2} 5 + 2^{2x}$

$$2^x \log_5 y = 2 + 2^{2x} \rightarrow AB = 2 + A^2 \text{ ---(1)}$$

จาก  $2^x \log_5 y^3 = (\log_5 y)^2 + 9$

$$2^x (3 \log_5 y) = (\log_5 y)^2 + 9 \rightarrow 3AB = B^2 + 9 \text{ ---(2)}$$

จาก (1),  $B = \frac{2+A^2}{A} \rightarrow B = \frac{2}{A} + A \text{ ---(3)}$

แทน (3) ใน (2) จะได้  $3A \left( \frac{2}{A} + A \right) = \left( \frac{2}{A} + A \right)^2 + 9$

$$6 + 3A^2 = \frac{4}{A^2} + 4 + A^2 + 9$$

$$2A^2 - 7 - \frac{4}{A^2} = 0$$

$$2A^4 - 7A^2 - 4 = 0$$

$$(2A^2 + 1)(A^2 - 4) = 0 \quad \text{ใช้ไม่ได้}$$

$$A^2 = \left( -\frac{1}{2} \right), 4$$

$$A = 2, -2 \quad \text{ใช้ไม่ได้}$$

$$2^x = 2, (-2)$$

ดังนั้น  $x = 1$

แทน  $A = 2$  ใน (3),  $B = \frac{2}{2} + 2 = 3$

$$\log_5 y = 3 \rightarrow y = 5^3 = 125 \quad \therefore xy = (1)(125) = 125$$

จะได้  $B = \{125\} \quad \therefore$  ค่ามากที่สุดของสมาชิกใน B คือ 125

ข้อ 9 ตอบ 1

$$\log_2 (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 16} < \log_2 (2 + \sqrt{3})$$

$$(2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 16} < (2 + \sqrt{3})$$

$$(2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 16} < (2 - \sqrt{3})^{-1}$$

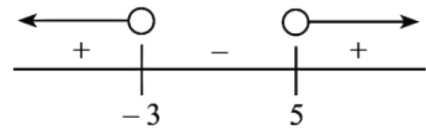
$$\begin{aligned}
 2 + \sqrt{3} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} &= \frac{4 - 3}{2 - \sqrt{3}} \\
 &= (2 - \sqrt{3})^{-1}
 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x - 16 > -1$$

$$x^2 - 2x - 15 > 0$$

$$(x - 5)(x + 3) > 0$$

$$\therefore A = (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$$



$\therefore$  พบว่า A เป็นสับเซตของตัวเลือกข้อ 1

ข้อ 10 ตอบ 5

ข้อ 11 ตอบ 2

ก.  $\log_2 a < \log_2 b \rightarrow \boxed{a < b}$

ข.  $\frac{2^b}{3^b} > \frac{2^d}{3^d}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^b > \left(\frac{2}{3}\right)^d$$

$$\boxed{b < d}$$

ค.  $3^a 2^a - 3^{2c} > 3^c 2^a - 3^c 3^a$

$$3^a 2^a - 3^{2c} - 3^c 2^a + 3^c 3^a > 0$$

$$2^a (3^a - 3^c) + 3^c (3^a - 3^c) > 0$$

$$(3^a - 3^c)(2^a + 3^c) > 0 \quad \text{และ} \quad 2^a + 3^c > 0 \quad \text{แน่ๆ}$$

$$3^a - 3^c > 0$$

$$3^a > 3^c \rightarrow \boxed{a > c}$$

จาก ก, ข และ ค จะได้  $c < a < b < d$

$\therefore$   $b+d$  มีค่ามากที่สุด

ข้อ 12 ตอบ 3

$$\text{จาก } \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \rightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 y + \frac{1}{2} \log_2 z = 2$$

$$2 \log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 4 \rightarrow \log_2 (x^2 y z) = 4 \rightarrow x^2 y z = 2^4 \quad \text{————(1)}$$

$$\text{จาก } \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \rightarrow \log_3 y + \frac{1}{2} \log_3 z + \frac{1}{2} \log_3 x = 2$$

$$2 \log_3 y + \log_3 z + \log_3 x = 4 \rightarrow \log_3 (y^2 z x) = 4 \rightarrow y^2 z x = 3^4 \quad \text{————(2)}$$

$$\text{จาก } \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \rightarrow \log_4 z + \frac{1}{2} \log_4 x + \frac{1}{2} \log_4 y = 2$$

$$2 \log_4 z + \log_4 x + \log_4 y = 4 \rightarrow \log_4 (z^2 x y) = 4 \rightarrow z^2 x y = 4^4 \quad \text{————(3)}$$

$$(1) \times (2) \times (3), \quad x^4 y^4 z^4 = 2^4 3^4 4^4 \rightarrow x y z = 24 \quad \text{————(4)}$$

$$\frac{(1)}{(4)}, \quad x = \frac{16}{24} \rightarrow \frac{(2)}{(4)}, \quad y = \frac{81}{24} \rightarrow \frac{(3)}{(4)}, \quad z = \frac{256}{24}$$

$$\therefore 15x + 8y + 3z = 15\left(\frac{16}{24}\right) + 8\left(\frac{81}{24}\right) + 3\left(\frac{256}{24}\right) = 69$$

## ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ข้อ 1 ตอบ 4

ข้อ 2 ตอบ 1

ข้อ 3 ตอบ 2

ข้อ 4 ตอบ 3

ข้อ 5 ตอบ 1

ข้อ 6 ตอบ 1

$$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2 \rightarrow 1 + \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 2$$

$$\tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B \rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$$

$$\tan(A+B) = 1 \rightarrow A+B = 45^\circ \text{ เพราะว่า } 0 < A+B < \pi \text{ หรือ } 0^\circ < A+B < 180^\circ$$

$$\therefore \tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan^2 22.5^\circ = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$$

\* หมายเหตุ  $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$  ซึ่งควรจำได้นะครับจะประหยัดเวลามาก \*

แต่ถ้าอยากทำวิธีตรงก็ทำได้ดังนี้ครับ

$$\begin{aligned} \tan^2 22.5^\circ &= \frac{\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ} = \frac{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$* \text{ หมายเหตุ } \cos 2A = 1-2\sin^2 A \rightarrow \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A-1 \rightarrow \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

**ข้อ 7 ตอบ 5**

จากสมบัติของ arc เราทราบว่า  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  เมื่อ  $-1 \leq x \leq 1$

จากโจทย์  $\arcsin(6x-1) + \arccos(9x^2) = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น  $6x-1 = 9x^2 \rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow (3x-1)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

นำ  $x = \frac{1}{3}$  ไปตรวจคำตอบพบว่าสมการเป็นจริง  $\therefore x = \frac{1}{3}$

**ข้อ 8 ตอบ 3**

**ข้อ 9 ตอบ 4**

**ข้อ 10 ตอบ 20**

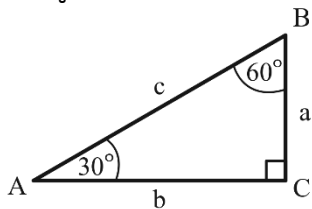
จากโจทย์  $2\cos 2A - 8\sin A + 3 = 0 \rightarrow 2(1 - 2\sin^2 A) - 8\sin A + 3 = 0$

$4\sin^2 A + 8\sin A - 5 = 0 \rightarrow (2\sin A - 1)(2\sin A + 5) = 0$

$\sin A = \frac{1}{2}, \left(-\frac{5}{2}\right)$  ใช้ไม่ได้ เพราะ  $-1 \leq \sin A \leq 1$

$A = 30^\circ$  และโจทย์กำหนด  $C = 90^\circ$  ดังนั้น  $B = 60^\circ$

วาดรูปตามโจทย์



จากรูป  $\frac{c}{a} = \csc 30^\circ = 2 \rightarrow c = 2a$

$\frac{b}{a} = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \rightarrow b = \sqrt{3}a$

โจทย์กำหนด  $a+c = 30$  แต่  $c = 2a$  ดังนั้น  $a+2a = 30 \rightarrow a = 10$

$$\begin{aligned} \therefore a\sin A + b\sin B &= a\sin 30^\circ + \sqrt{3}a\sin 60^\circ = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}a \\ &= 2a = 2(10) = 20 \end{aligned}$$

ข้อ 11 ตอบ 5

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin 130^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 290^\circ} &= \frac{2 \sin 50^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} \\ &= \frac{\cos 40^\circ + (\cos 40^\circ - \cos 20^\circ)}{\cos 70^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - 2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ}{\cos 70^\circ} \\ &= \frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2 \cos 30^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

จะได้  $A = \arctan \left( \frac{2 \sin 130^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 290^\circ} \right) = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - A\right) &= \sin(30^\circ + 60^\circ) \cos(30^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 90^\circ \cos(-30^\circ) = (1) \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

\* หมายเหตุ พี่ขอแถมให้อีกวิธีหนึ่งนะครั้บ เผื่อบางคนจะชอบวิธีนี้

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin 130^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 290^\circ} &= \frac{2 \sin 50^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2 \sin(30^\circ + 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} \\ &= \frac{2(\sin 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ \sin 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} \\ &= \frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3} \end{aligned}$$



ข้อ 12 ตอบ 1

$$\text{จากโจทย์ } A+B+C = 180^\circ \rightarrow \frac{A+B+C}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{A+C}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2}, \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\therefore a \sin^2\left(\frac{A+C}{2}\right) + b \sin^2\left(\frac{B+C}{2}\right) = a \sin^2\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) + b \sin^2\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$= a \cos^2 \frac{B}{2} + b \cos^2 \frac{A}{2} = a \left(\frac{1+\cos B}{2}\right) + b \left(\frac{1+\cos A}{2}\right)$$

$$* \text{ หมายเหตุ } \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \rightarrow \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1+\cos B}{2}, \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$$

$$= \frac{a+b+a\cos B+b\cos A}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\text{ความยาวของเส้นรอบรูป}}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$* \text{ หมายเหตุ จากกฎของโคไซน์ } a \cos B + b \cos A = c$$

$$b \cos C + c \cos B = a$$

$$a \cos C + c \cos A = b$$

## MATRIX

ข้อ 1 ตอบ 2

ข้อ 2 ตอบ 4

ข้อ 3 ตอบ 5

จาก  $B = A^{-1}BA$  นำ A คูณข้างหน้าทั้ง 2 ข้างจะได้

$$AB = AA^{-1}BA$$

$$\boxed{AB = BA}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & b \\ 2c-d & d \end{bmatrix}$$

พิจารณาแถว 1, หลัก 2 :  $2b = b \longrightarrow \boxed{b = 0}$  ———(1)

แถว 2, หลัก 1 :  $-a+c = 2c-d$

$$\boxed{a+c-d = 0} \quad \text{————(2)}$$

(1) + (2) ,  $a+b+c-d = 0$

ข้อ 4 ตอบ 3

ข้อ 5 ตอบ 3

จาก  $(A-B)B = B(A-B)$

$$AB - B^2 = BA - B^2 \rightarrow \boxed{AB = BA}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

พิจารณา แถว 1 , หลัก 1 :  $(1)(-3) + (2)(a) = (-3)(1) + (1)(-1)$

$$-3 + 2a = -3 - 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

แถว 2 , หลัก 1 :  $(-1)(-3) + (3)(a) = a(1) + b(-1)$

$$3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - b \rightarrow b = -2$$

จะได้  $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \det(A+B) = -2 + \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$$

ข้อ 6 ตอบ 23

ข้อ 7 ตอบ 5

จาก  $AB^t = I \rightarrow \boxed{B^t = A^{-1}}$  และ  $\boxed{A = (B^t)^{-1}}$

↓

$$\boxed{B = (A^{-1})^t} \rightarrow \boxed{B^{-1} = A^t}$$

ก. จริง เพราะ  $AB^t = B^tA = I$

ข. จริง

ค. จริง

ง.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = A^tB^t = (BA)^t \therefore$  ง. จริง

ข้อ 8 ตอบ 5

ข้อ 9 ตอบ 9

$$\det A = 15 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & | & 1 & -2 \\ b & -a & 0 & | & b & -a \\ 3 & -1 & -1 & | & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a - 4b \rightarrow 7a - 4b = 15 \quad \text{--- (1)}$$

จากสมการ  $AX = B$  และกฎของคราเมอร์

จะได้  $y = \frac{\det Ay}{\det A} \rightarrow 1 = \frac{\det Ay}{15} \rightarrow \det Ay = 15$

$$\det Ay = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 & | & 1 & 9 \\ b & a & 0 & | & b & a \\ 3 & -10 & -1 & | & 3 & -10 \end{vmatrix} = -7a - 11b \rightarrow -7a - 11b = 15 \quad \text{--- (2)}$$

(1) + (2),  $-15b = 30 \rightarrow b = -2 \rightarrow$  แทน  $b$  ใน (1) จะได้  $7a - 4(-2) = 15 \rightarrow a = 1$

$\therefore (a - b)^2 = (1 - (-2))^2 = 3^2 = 9$

ข้อ 10 ตอบ 3

ระบบสมการมี 1 คำตอบ แสดงว่า  $\det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & -2 & | & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & | & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

จะได้  $3a - 6 \neq 0 \quad \therefore a \neq 2$

ข้อ 11 ตอบ 4

สมมติเมทริกซ์ที่สร้างคือ  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะสร้างได้ทั้งหมด  $\binom{5}{4} \times 4! = 120$  วิธี

Event คือ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แสดงว่า  $\det A \neq 0$

หา  $E'$  :  $\det A = 0 \rightarrow ad - bc = 0 \rightarrow \boxed{ad = bc}$

กรณีที่ 1  $ad = bc = 2$

$$(1)(2) = (-1)(-2)$$

$$(1)(2) = (-2)(-1)$$

$$(2)(1) = (-1)(-2)$$

$$(2)(1) = (-2)(-1)$$

$$(-1)(-2) = (1)(2)$$

$$(-1)(-2) = (2)(1)$$

$$(-2)(-1) = (1)(2)$$

$$(-2)(-1) = (2)(1)$$

$\therefore$  กรณีที่ 1 มี 8 วิธี

กรณีที่ 2  $ad = bc = -2$

$$(1)(-2) = (-1)(2)$$

$$(1)(-2) = (2)(-1)$$

$$(-2)(1) = (-1)(2)$$

$$(-2)(1) = (2)(-1)$$

$$(-1)(2) = (1)(-2)$$

$$(-1)(2) = (-2)(1)$$

$$(2)(-1) = (1)(-2)$$

$$(2)(-1) = (-2)(1)$$

$\therefore$  กรณีที่ 2 มี 8 วิธี

รวม 2 กรณีจะได้  $n(E') = 16$  วิธี

ดังนั้น  $n(E) = 120 - 16 = 104$  วิธี

$$\therefore P(E) = \frac{104}{120} = \frac{13}{15}$$

\*\*\*\*\*