

## เฉลยโจทย์ โครงการเพิ่มพูนศักยภาพทางคณิตศาสตร์เพื่อการแข่งขัน โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี

ข้อ 12 ตอบ 20

ถ้า  $a+b+c = 0$  แล้ว  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

จากโจทย์  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{20-x} + (-2) = 0$

$$x + (20-x) + (-8) = 3 \sqrt[3]{x(20-x)} (-2)$$

$$-2 = \sqrt[3]{20x - x^2}$$

$$-8 = 20x - x^2$$

$$x^2 - 20x - 8 = 0$$

$\therefore \alpha + \beta = -(-20) = 20$

ข้อ 14 ตอบ 1

$$f(-x) = \frac{1}{2^a - x} + \frac{1}{2^a + x} - 1 = f(x) \text{ พบว่า } f(-x) = f(x)$$

จาก  $f(1)+f(-1) = \frac{2}{3} \rightarrow f(1)+f(1) = \frac{2}{3}$

ดังนั้น  $f(1) = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2^a + 1} + \frac{1}{2^a - 1} - 1 = \frac{1}{3}$

$$\frac{2^a - 1 + 2^a + 1}{2^{2a} - 1} = \frac{4}{3} \rightarrow 2(2^a) \times 3 = 4(2^{2a} - 1)$$

$$4(2^{2a}) - 6(2^a) - 4 = 0 \rightarrow 2(2^{2a}) - 3(2^a) - 2 = 0$$

$$(2(2^a) + 1)(2^a - 2) = 0 \rightarrow 2^a = \left(-\frac{1}{2}\right), 2 \quad \therefore a = 1$$

ใช้ไม่ได้

**ข้อ 16 ตอบ -350**

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4, P\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

จากการสังเกต  $P(x) = 1 - x^4$

ลองแทนค่าใน  $P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right)$  จริงหรือไม่

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = (1 - x^4)\left(1 - \frac{1}{x^4}\right) = 1 - \frac{1}{x^4} - x^4 + 1 = -\frac{1}{x^4} - x^4 + 2$$

และ  $P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right) = (1 - x^4) + \left(1 - \frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{x^4} - x^4 + 2$

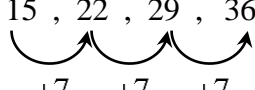
ดังนั้น  $P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x) + P\left(\frac{1}{x}\right)$  จริง

$$\begin{aligned} \therefore P(1) + P(2) + P(3) + P(4) &= (1 - 1^4) + (1 - 2^4) + (1 - 3^4) + (1 - 4^4) \\ &= -350 \end{aligned}$$

**ข้อ 17 ตอบ 777**

จาก  $P(1) = 15, P(2) = 22, P(3) = 29, P(4) = 36, P(5) = 43, P(6) = 50$

พิจารณา  $15, 22, 29, 36, 43, 50, \dots$  ดังนั้นรูปทั่วไปคือ  $\boxed{7x+8}$



$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + (7x+8)$$

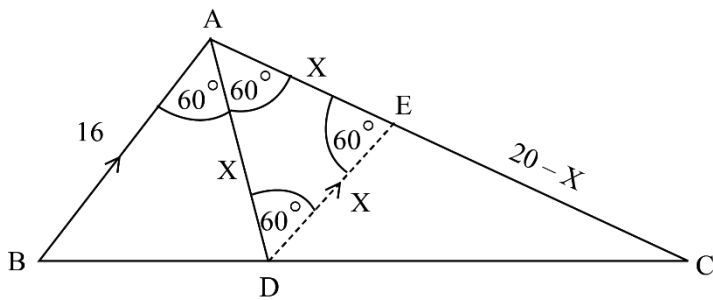
$$\therefore P(7) = (6)(5)(4)(3)(2)(1) + 7(7) + 8 = 777$$

ข้อ 22 ตอบ 1

$$\text{จาก } \cos A + \cos^2 A = 1 \begin{cases} \cos A = 1 - \cos^2 A \\ \boxed{\cos A = \sin^2 A} \text{ --- (1)} \\ \boxed{\cos^2 A = 1 - \cos A} \text{ --- (2)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore 5\sin^{12} A + 8\sin^{10} A &= 5(\sin^2 A)^6 + 8(\sin^2 A)^5 \\ &= 5\cos^6 A + 8\cos^5 A = \cos^4 A(5\cos^2 A + 8\cos A) \\ &= (1 - \cos A)^2 [5(1 - \cos A) + 8\cos A] \\ &= (1 - 2\cos A + \cos^2 A)(5 + 3\cos A) \\ &= (1 - 2\cos A + 1 - \cos A)(5 + 3\cos A) \\ &= (2 - 3\cos A)(5 + 3\cos A) = 10 - 9\cos A - 9\cos^2 A \\ &= 10 - 9(\cos A + \cos^2 A) = 10 - 9(1) = 1 \end{aligned}$$

ข้อ 32 ตอบ 2



ลาก  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

สมมุติ  $AD = x$

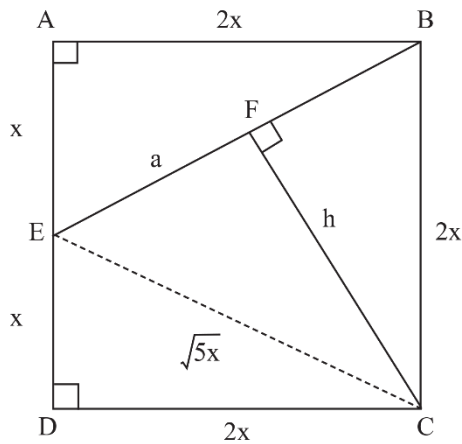
จะได้  $\triangle ADE$  เป็น  $\triangle$  ด้านเท่า

$\triangle CED \sim \triangle CAB$

$$\frac{x}{16} = \frac{20 - x}{20}$$

$$\therefore x = \frac{80}{9}$$

ข้อ 34 ตอบ 100



สมมุติ  $AB = 2x$  ,  $EF = a$  ,  $CF = h$

$$EC = AB = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5x}$$

$$[\triangle BEC] = \frac{1}{2}(\sqrt{5x})h = \frac{1}{2}(2x)(2x)$$

$$\therefore h = \frac{4x}{\sqrt{5}}$$

จาก  $\triangle CEF$  ,  $a^2 = (\sqrt{5x})^2 - h^2$

$$a^2 = 5x^2 - \left(\frac{4x}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5x^2 - \frac{16x^2}{5}$$

$$a^2 = \frac{9}{5}x^2 \rightarrow \therefore a = \frac{3}{\sqrt{5}}x$$

จาก  $[\square DEFC] = [\triangle DEC] + [\triangle EFC]$

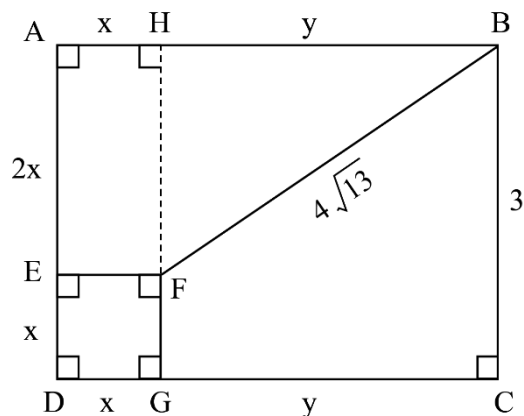
$$55 = \frac{1}{2}(x)(2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x\right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}}x\right)$$

$$55 = x^2 + \frac{6}{5}x^2$$

$$x^2 = 25$$

$\therefore [\square ABCD] = 4x^2 = 4(25) = 100$  ตารางหน่วย

ข้อ 35 ตอบ 56



สมมุติ  $DE = x$  ,  $AE = 2x$  ,  $BH = y$

พ.ท.  $\square BAEF = 80$

$$\frac{1}{2}(2x+y)(2x) = 80$$

$$\boxed{y = \frac{80}{y} - 2x} \quad \text{--- (1)}$$

จาก  $\triangle BHF$  ,  $(2x)^2 + y^2 = (4\sqrt{13})^2$

$$4x^2 + \left(\frac{80}{x} - 2x\right)^2 = 16(13)$$

$$4x^2 + \frac{6400}{x^2} - 320 + 4x^2 = 16(13)$$

$$\frac{800}{x^2} - 40 + x^2 = 26$$

$$x^4 - 66x^2 + 800 = 0$$

$$(x^2 - 16)(x^2 - 50) = 0$$

$$x^2 = 16, \quad \textcircled{50}$$

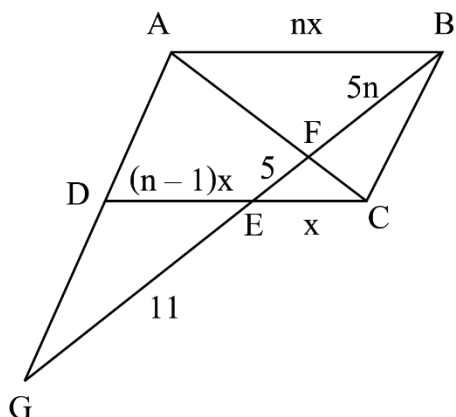
ใช้ไม่ได้ เพราะ x ต้องเป็น

$\therefore x = 4$  , แทนใน (1) ได้  $y = 12$

จำนวนตรรกยะ

$\therefore$  ความยาวรอบรูป  $\square ABCD = 56$

ข้อ 37 ตอบ 16



สมมุติ  $EC = x$ ,  $AB = n(x)$

$$\triangle ABF \sim \triangle CEF \quad \therefore BF = 5n$$

$$\triangle GDE \sim \triangle BCE$$

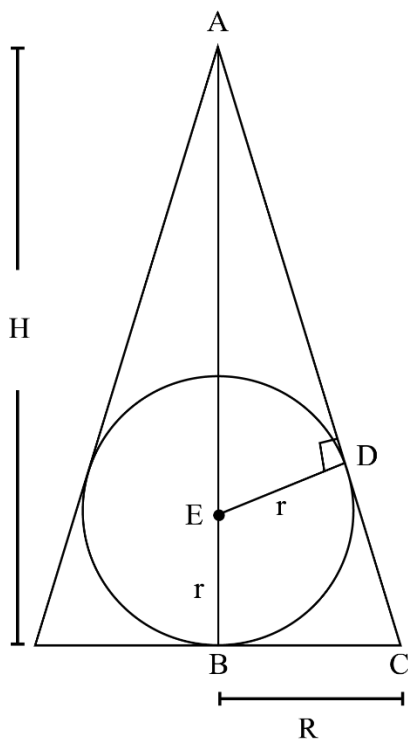
$$\frac{(n-1)x}{x} = \frac{11}{5+5n}$$

$$(n-1)(5)(n+1) = 11$$

$$n^2 - 1 = \frac{11}{5}$$

$$\therefore 5n^2 = 16$$

ข้อ 42 ตอบ 3



$$\text{จาก } \frac{r}{R} = \frac{3}{5} \rightarrow R = \frac{5}{3}r$$

$$AC = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}r\right)^2 + H^2}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{H-r}{AC}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{H-r}{\sqrt{\frac{25}{9}r^2 + H^2}}$$

$$\frac{25}{9}r^2 + H^2 = \frac{25}{9}(H-r)^2$$

$$\frac{25}{9}r^2 + H^2 = \frac{25}{9}H^2 - \frac{25}{9}(2Hr) + \frac{25}{9}r^2$$

$$\frac{50}{9}Hr = \frac{16}{9}H^2$$

$$\therefore \frac{r}{H} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$

\*\*\*\*\*