

คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1

เรื่อง ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน, ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม และเรขาคณิตวิเคราะห์ เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

ข้อ 12 ตอบ 2

เดือนแรก ขายชิ้นละ 50 บาท โดยทุนชิ้นละ 20 บาท

จึงได้กำไรชิ้นละ $50 - 20 = 30$ บาท

ซึ่งขายได้ 500 ชิ้น กำไรรวม $500 \times 30 = 15,000$ บาท

ต่อมาลดราคา $x\%$

$$\begin{aligned}\text{กำไรต่อชิ้น} &= \text{ราคาขาย} - \text{ทุน} \\ &= \left[50 - \frac{x}{100}(50) \right] - 20 \\ &= 30 - \frac{x}{2}\end{aligned}$$

และขายได้มากขึ้น $10x$ ชิ้นต่อเดือน

ขายได้เดือนละ $= 500 + 10x$

กำไรรวม $=$ กำไรต่อชิ้น \times จำนวนชิ้นที่ขายได้

$$y = \left(30 - \frac{x}{2} \right) (500 + 10x)$$

$$y = 15,000 + 300x - 250x - 5x^2$$

$$y = -5x^2 + 50x + 15,000 \quad \text{---(1)}$$

พิจารณา (ก)

ราคาขาย 45 บาท แสดงว่า ลดราคา $50 - 45 = 5$ บาท

คิดเป็น $\frac{5}{50} \times 100\% = 10\% \quad \therefore x = 10$

$$\text{กำไร} = (45 - 20) \times (500 + 10(10))$$

$$= 25 \times 600 = 15,000 \text{ บาท}$$

\therefore กำไรเท่ากับเดือนแรก

(ก) ถูก

พิจารณา (ข)

จาก (1) x ที่ทำให้ y สูงสุดคือ $-\frac{b}{2a}$

โดย $y = ax^2 + bx + c \quad \therefore x = -\frac{50}{2(-5)} = 5$ จะทำให้กำไร (y) สูงสุด

5% คิดเป็น $\frac{5}{100} \times 50 = 2.5$ บาท

แสดงว่าต้องขายราคาขึ้นละ $50 - 2.5 = 47.5$ บาท จึงได้กำไรสูงสุด **(ข) ผิด**

พิจารณา (ค)

จาก (1) y สูงสุดคือ $\frac{4ac - b^2}{4a}$

โดย $y = ax^2 + bx + c \quad \therefore y$ สูงสุด $= \frac{4(-5)(15,000) - 50^2}{4(-5)}$
 $= 15,125$ **(ค) ถูก**

ข้อ 13 ตอบ 3

สมมติให้ลดค่าเช่าลง x บาทต่อเดือน โดย 50 หาร x ลงตัว จะได้ว่า

ค่าเช่าคือ $2,000 - x$ บาทต่อเดือน และจะมีจำนวนผู้เช่า $20 + 2 \cdot \frac{x}{50}$

เมื่อให้ y คือรายรับทั้งหมด จะได้ว่า

$$y = (2,000 - x) \left(20 + 2 \cdot \frac{x}{50} \right)$$

$$= -\frac{2}{50}x^2 + 60x + 40,000$$

ค่า x ที่ทำให้ y สูงสุด $= \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2\left(-\frac{2}{50}\right)} = 750$ (50 หาร 750 ลงตัว)

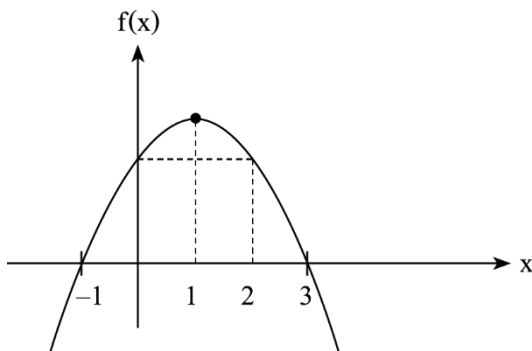
แสดงว่าควรคิดค่าเช่า $2,000 - 750 = 1,250$ บาท

ซึ่งจะมีผู้เช่าจำนวน $20 + 2 \cdot \frac{750}{50} = 50$ ห้อง (เต็มพอดี)

ข้อ 14 ตอบ 4

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } f(x) &= 3 + 2x - x^2 \quad \text{---(1)} \\
 &= -(x^2 - 2x - 3) \\
 &= -(x+1)(x-3)
 \end{aligned}$$

โดยเมื่อ $f(x) = 0$ จะได้ $x = -1, 3$ จะได้ว่า จุดตัดแกน x คือ $(-1, 0), (3, 0)$
 และวาดได้กราฟพาราโบลา ดังรูป



พิจารณา ก. เราสามารถหา x ที่ทำให้ $f(x)$ สูงสุดได้โดย $x = \frac{-1+3}{2} = 1$

เพราะค่า x ของจุดยอดจะอยู่กึ่งกลางระหว่างค่า x ของจุดตัดแกน x ทั้ง 2

หรือจากสูตร $x = \frac{-b}{2a}$ โดยจาก (1) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$$\therefore x = \frac{-2}{2(-1)} = 1 \quad \text{ดังนั้น ก. ผิด}$$

พิจารณา ข. จาก ก. แทน $x = 1$ ได้

$$y_{\max} = f(1) = 3 + 2(1) - 1^2 = 4$$

ดังนั้น ข. ถูก

พิจารณา ค. จากกราฟพบว่า ที่ $x = 2$ จะให้ค่า y เท่ากับที่ $x = 0$

ดังนั้น ค. ถูก

พิจารณา ง. จากกราฟพบว่า ที่ $x = 3$ จะได้ค่า $y = 0$

แสดงว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที ลูกบอลจะตกถึงพื้นดิน

ดังนั้น ง. ถูก

จึงถูก 3 ข้อความ คือ ข. ค. และ ง.

ข้อ 18 ตอบ 5

$$x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} \quad \text{โดย } x, y > 0$$

$$\log_2(y \cdot 3^x) = \log_2\left(2^y \cdot \frac{3x}{2}\right)$$

$$y \cdot 3^x = 2^y \cdot \frac{3x}{2} \quad \text{---(1)}$$

$$x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \frac{2y}{3}$$

$$\log_3(12^x \cdot x) = \log_3\left(3^y \cdot \frac{2y}{3}\right)$$

$$(12^x \cdot x) = 3^y \cdot \frac{2y}{3} \quad \text{---(2)}$$

$$(1) \times (2) : \quad \cancel{y} \cdot 3^x \cdot 12^x \cdot \cancel{x} = 2^y \cdot \frac{\cancel{3}^x}{\cancel{2}} \cdot 3^y \cdot \frac{\cancel{2}^y}{\cancel{3}}$$

$$36^x = 6^y \rightarrow 6^{2x} = 6^y \quad \text{ดังนั้น } 2x = y$$

$$\text{แทน } y = 2x \text{ ใน (1) : } \cancel{2}^x \cdot 3^x = 2^{2x} \cdot \frac{\cancel{3}^x}{2}$$

$$\frac{2 \times 2}{3} = \frac{4^x}{3^x} \rightarrow \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

จะได้ $x = 1$ และ $y = 2$

แสดงว่า $A = \{(1, 2)\}$ ดังนั้น $B = \{1^2 + 2^2\} = \{5\}$

\therefore ผลบวกสมาชิกภายใน $B = 5$

ข้อ 29 ตอบ 4

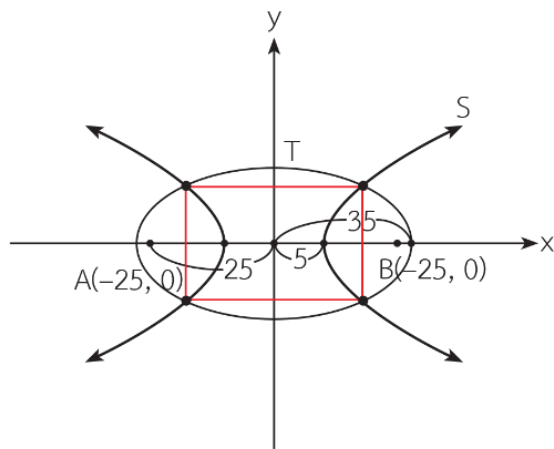
S คือ เซตของจุด P โดยที่ $|PA - PB| = 10$

แสดงว่า กราฟที่ได้จะเป็นกราฟไฮเพอร์โบลามี A และ B เป็นจุดโฟกัสตามนิยามของกราฟไฮเพอร์โบล่า และจะได้ว่า $2a_H = 10 \rightarrow a_H = 5$ เป็นไฮเพอร์โบลาลู่ x มีจุดศูนย์กลางคือ (0, 0)

T คือ เซตของจุด Q โดยที่ $QA + QB = 70$

แสดงว่า กราฟที่ได้จะเป็นกราฟวงรี มี A และ B เป็นจุดโฟกัสตามนิยามของกราฟวงรี และจะได้ว่า $2a_E = 70 \rightarrow a_E = 35$ เป็นวงรีไขว่มีจุดศูนย์กลางคือ (0, 0)

วาดกราฟได้ดังรูป



โดย รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งหมด อยู่ในเซต $S \cap T$ คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดตัดทั้ง 4 ของกราฟทั้งสองดังรูป

จากรูป ไฮเพอร์โบลามีจุด A และ B เป็นจุดโฟกัส

ดังนั้น ศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาคือ จุด (0, 0) มี $c_H = 25$

จาก $c_H^2 = a_H^2 + b_H^2 \rightarrow 25^2 = 5^2 + b_H^2 \rightarrow b_H^2 = 600$

ดังนั้น $H : \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{600} = 1 \quad \text{--- (1)}$

จากรูป วงรีมีจุด A และ B เป็นจุดโฟกัส มีศูนย์กลางคือ (0, 0) และ $c_E = 25$

จาก $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2 \rightarrow 35^2 = b_E^2 + 25^2 \rightarrow b_E^2 = 600$

ดังนั้น $E : \frac{x^2}{35^2} + \frac{y^2}{600} = 1 \quad \text{--- (2)}$

หาจุดตัดทั้ง 4 โดย

(1) + (2), $\frac{x^2}{25} + \frac{x^2}{35^2} = 2 \rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{x^2}{5^2 \times 7^2} = 2$

$\frac{7^2 x^2 + x^2}{5^2 \times 7^2} = 2 \rightarrow 50x^2 = 2 \times 5^2 \times 7^2$

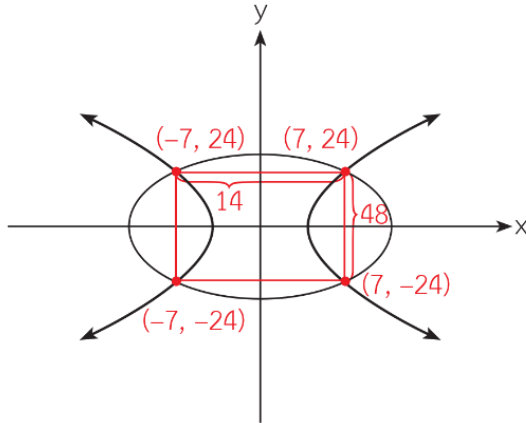
$x^2 = 7^2 \rightarrow x = 7 \text{ หรือ } x = -7$

แทน $x^2 = 7^2$ ใน (1) , $\frac{7^2}{25} - \frac{y^2}{600} = 1 \rightarrow \frac{49}{25} - 1 = \frac{y^2}{600}$

$$\frac{y^2}{600} = \frac{24}{25} \rightarrow y^2 = \frac{24 \times 600}{25}$$

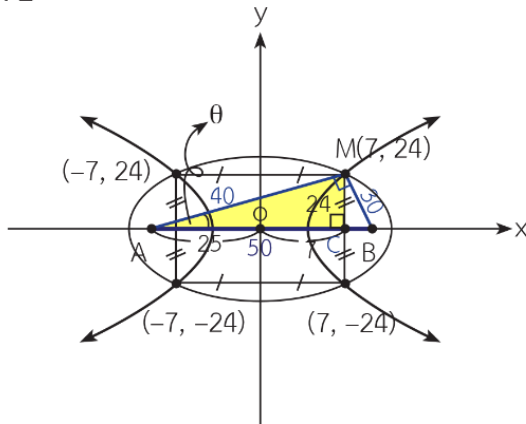
$$y^2 = 24^2 \rightarrow y = 24 \text{ หรือ } y = -24$$

แสดงว่า จุดตัดระหว่างกราฟทั้งสอง คือจุด $(7, 24)$, $(7, -24)$, $(-7, 24)$, $(-7, -24)$



∴ ความยาวเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม
 $= 2(14 + 48) = 124$

วิธีที่ 2



เนื่องจากรูปกราฟทั้ง 2
 มีจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัสร่วมกัน
 ดังนั้น สี่เหลี่ยมที่เกิดจากการลากเส้นเชื่อม
 ระหว่างจุดตัดจะสมมาตรกันทั้งซ้าย - ขวา
 และ บน - ล่าง ดังรูป
 ให้ M คือ จุดตัดของกราฟทั้ง 2

จากรูป จะเห็นว่า $MA > MB$

ดังนั้น จากนิยามไฮเพอร์โบลา $MA - MB = 10$ — (1)

และ จากนิยามของวงรี $MA + MB = 70$ — (2)

(1) + (2) , $2 MA = 80 \rightarrow MA = 40$ และ $MB = 30$ เนื่องจาก $AB = 50$

ทำให้ $\triangle ABM$ เป็น \triangle มุมฉาก และจะเห็นว่า $\triangle AMC$ เป็น \triangle มุมฉากด้วย

จากรูป $\tan \theta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ ของ $\sin \theta = \frac{3}{5}$ และ $\cos \theta = \frac{4}{5}$

$\triangle AMC$, $MC = AM \sin \theta = 40 \left(\frac{3}{5}\right) = 24$, $AC = AM \cos \theta = 40 \left(\frac{4}{5}\right) = 32$

ซึ่ง $AO = 25$ จะได้ว่า $OC = AC - AO = 32 - 25 = 7$ ดังนั้น จุด M คือ $(7, 24)$

จากความสมมาตรทำให้เราได้ว่าจุดตัดที่เหลือคือ $(7, -24)$, $(-7, 24)$, $(-7, -24)$

∴ ความยาวเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม $= 2(14 + 48) = 124$
