เฉลยโจทย์เพิ่มเติม

5. ค่าของ $\left[\frac{2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+\ldots+2^{-2022}}{2^{-1}-2^{-2}+2^{-3}-2^{-4}+\ldots-2^{-2022}}\right]^3 \times \left[\frac{3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+3^{-4}+\ldots+3^{-2022}}{3^{-1}-3^{-2}+3^{-3}-3^{-4}+\ldots-3^{-2022}}\right]^4$ เท่ากับเท่าใด

ให้ $A = 2^{-2}+2^{-4}+2^{-6}+\ldots+2^{-2022}$

$2A = 2^{-1}+2^{-3}+2^{-5}+\ldots+2^{-2021}$

แทนค่าจะได้

$\left[\frac{2A+A}{2A-A}\right]^3 = 3^3 = 27$

ให้ $B = 3^{-2}+3^{-4}+3^{-6}+\ldots+3^{-2022}$

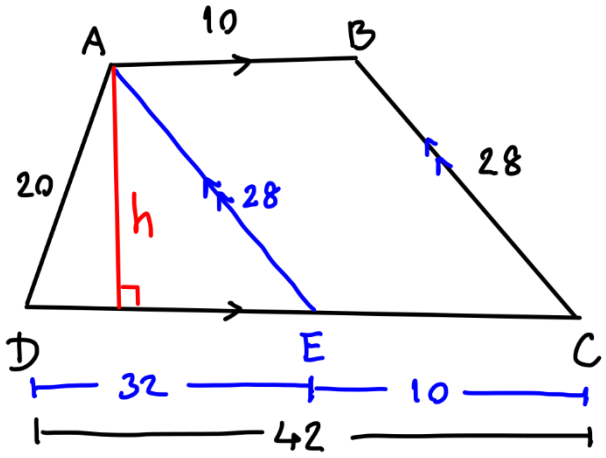
$3B = 3^{-1}+3^{-3}+3^{-5}+\ldots+3^{-2021}$

แทนค่าได้

$\left[\frac{3B+B}{3B-B}\right]^4 = 2^4 = 16$

$\therefore$ ข้อนี้ตอบ $27 \times 16 = 432$

16. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีด้านคู่ขนานยาว 10 และ 42 เซนติเมตร และด้านที่เหลือยาว 20 และ 28 เซนติเมตร (สพฐ.)



สร้าง $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ ทำให้ $AE = BC = 28$

และ $AE = EC = AB = 10$ ทำให้ $DE = 32$

พื้นที่ $\triangle ADE = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+28+32}{2} = 40$

พื้นที่ $\triangle ADE = \sqrt{40(20)(12)(8)} = 160\sqrt{3}$

และ พื้นที่ $\triangle ADE = \frac{1}{2}(32)(h)$

จะได้ $16h = 160\sqrt{3}$ $\therefore h = 10\sqrt{3}$

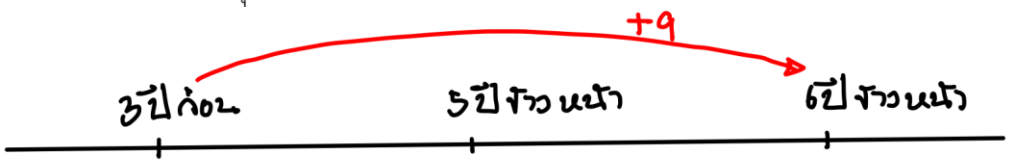
พื้นที่ $\square ABCE$ = ฐาน × สูง $= 10(10\sqrt{3}) = 100\sqrt{3}$

$\therefore$ พื้นที่ $\square ABCD$ = พื้นที่ $\triangle ADE$ + พื้นที่ $\square ABCE$

$= 160\sqrt{3} + 100\sqrt{3} = 260\sqrt{3}$ ตร.หน่วย

21. ในอีกหกปีข้างหน้าอัตราส่วนอายุของเฟย์และฟางจะเท่ากับ 7 : 8
ถ้าเมื่อสามปีที่แล้วเฟย์และฟางมีอายุเป็นอัตราส่วน 11 : 13
แล้วอีกห้าปีข้างหน้าเฟย์และฟางจะมีอายุรวมกันเท่ากับข้อใด (TU 5 มี.ค. 65)

1. 73 ปี
2. 78 ปี
3. 83 ปี
4. 88 ปี



เฟย์	$11x$	$11x+9$
ฟาง	$13x$	$13x+9$

สมมุติ 3ปีก่อน เฟย์อายุ $11x$ และ ฟางอายุ $13x$

อีก 6 ปีข้างหน้า เฟย์อายุ $11x+9$ และฟางอายุ $13x+9$

สมการคือ $\frac{11x+9}{13x+9} = \frac{7}{8}$

$$88x+72 = 91x+63$$

$$x = 3$$

ดังนั้น 3ปีก่อน เฟย์อายุ 33 ปี , ฟาง อายุ 39 ปี

$\therefore$ อีก 5 ปีข้างหน้า อายุรวม $= (33+8)+(39+8) = 88$ ปี

24. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ โดย $P(x) = ax + b$ และ $Q(x) = \frac{x+b}{a}$ ถ้า $x + 2$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 4 และ $2P(1) = Q(8)$ แล้ว $a^2 + b^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (TU ปี 64)

$P(-2) = 4$

จาก $P(-2) = 4 \rightarrow -2a + b = 4 \rightarrow \boxed{b = 2a+4}$ —①

จาก $2P(1) = Q(8) \rightarrow 2(a+b) = \frac{8+b}{a}$

แทน $b = 2a+4$ จะได้ $2(a+2a+4) = \frac{8+2a+4}{a}$

$$2(3a+4) = \frac{2a+12}{a}$$

$$3a^2+4a = a+6$$

$$3a^2+3a-6 = 0$$

$$a^2+a-2 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0$$

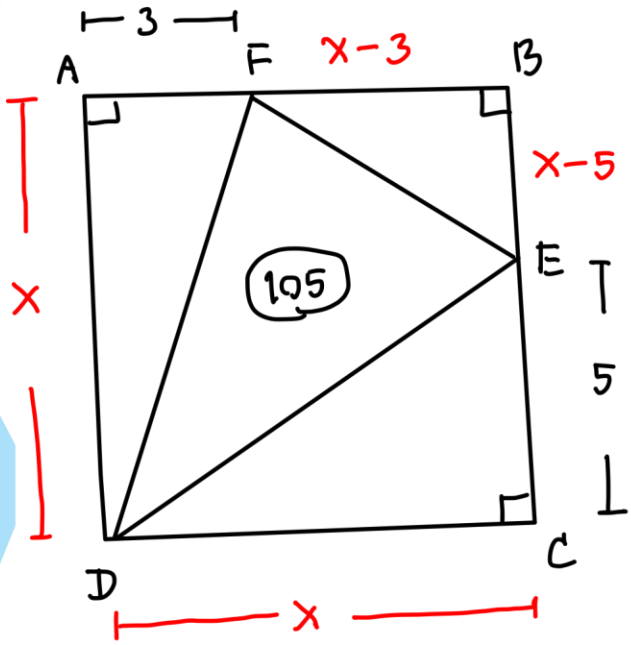
$$\boxed{a = -2, 1}$$

แทนค่า a ใน ① , $a=-2$, $b=0$ ใช้ไม่ได้เพราะโจทย์บอก $b \neq 0$

$a = 1$, $b = 6$

$\therefore a^2+b^2 = 1^2+6^2 = 37$

28. ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี F เป็นจุดบนด้าน AB ทำให้ AF = 3, E เป็นจุดบนด้าน BC ทำให้ CE = 5 ถ้า ΔDEF มีพื้นที่เท่ากับ 105 ตารางหน่วย ผลรวมของพื้นที่ ΔADF กับ ΔDEC มีค่าเท่ากับเท่าใด (TU)



$[\Delta DEF] = [\square ABCD] - [\Delta ADF] - [\Delta CDE] - [\Delta BEF]$

$105 = x^2 - \frac{1}{2}(x)(3) - \frac{1}{2}(x)(5) - \frac{1}{2}(x-3)(x-5)$

$105 = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 15)$

$x^2 = 225$ $\therefore x = 15$

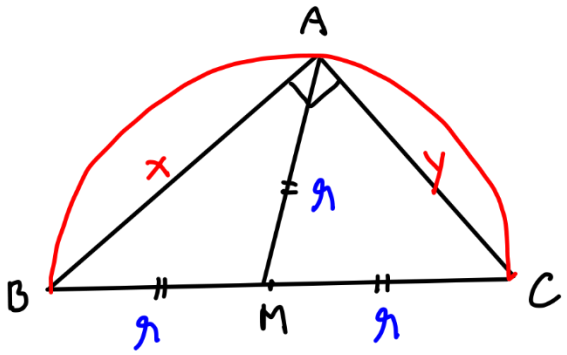
$\therefore [\Delta ADF] + [\Delta DEC] = 4x = 4(15) = 60$ ตร.หน่วย

31. รูปสามเหลี่ยม ABC มี M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC

ถ้า $8AM = 3(AB + AC) = 4BC$

แล้ว $\left(\frac{AB - AC}{AM}\right)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{4}{9}$ 3. $\frac{6}{9}$ 4. $\frac{8}{9}$



จาก $8AM = 4BC \rightarrow BC = 2AM$

แสดงว่า $AM = BM = MC$

ทำให้สามารถสร้างครึ่งวงกลมโดยมี

M เป็นจุดศูนย์กลาง ผ่าน A, B, C ได้

ให้ $AB = x$, $AC = y$

จาก $\triangle ABC$, $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$x^2 + y^2 = (2r)^2 \quad \text{— ①}$$

จาก $3(AB+AC) = 4BC$

$$3(x+y) = 4(2r)$$

$$x+y = \frac{8}{3}r$$

$$(x+y)^2 = \left(\frac{8}{3}r\right)^2$$

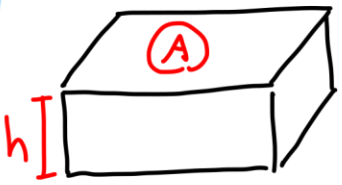
$$x^2+y^2+2xy = \frac{64}{9}r^2 \quad \text{— ②}$$

② − ①, $2xy = \frac{64}{9}r^2 - 4r^2 = \frac{28}{9}r^2$

โจทย์ถาม $\left(\frac{AB-AC}{AM}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{r}\right)^2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{r^2}$

$$= \frac{4r^2 - \frac{28}{9}r^2}{r^2} = \frac{8}{9}$$

36. ถังน้ำทรงปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่งบรรจุน้ำเต็ม ถ้าต้องการนำน้ำในถังไปบรรจุในถังแบบใหม่ 2 แบบ โดยแบบที่ 1 มีความสูงลดลง 4 หน่วย พื้นที่หน้าตัดเพิ่มขึ้น 6 ตารางหน่วย, แบบที่ 2 มีความสูงเพิ่มขึ้น 6 หน่วย พื้นที่หน้าตัดลดลง 3 ตารางหน่วย โดยถังทั้ง 3 แบบมีความจุเท่ากัน จงหาปริมาตรของถังแต่ละใบ (TU)



สมมุติ เดิม พ.ท.หน้าตัด $= A$, สูง $= h$

จะได้ ปริมาตร $= Ah = (A+6)(h-4) = (A-3)(h+6)$

$Ah = Ah+6h-4A-24 = Ah+6A-3h-18$

$Ah = Ah+6h-4A-24$

$6h-4A = 24$

$3h-2A = 12$ — ①

$Ah = Ah+6A-3h-18$

$6A-3h = 18$

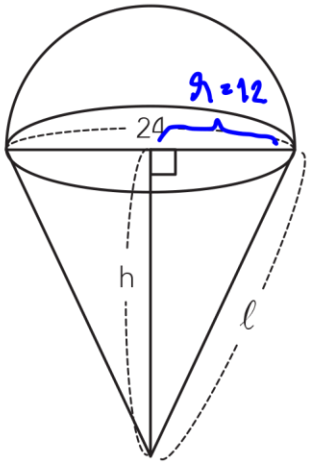
$2A-h = 6$ — ②

① + ②, $2h = 18 \rightarrow \boxed{h = 9}$

แทน $h = 9$ ใน ② จะได้ $A = \frac{15}{2}$

$\therefore$ ปริมาตรถัง $= Ah = (\frac{15}{2})(9) = 67.5$ ลบ.หน่วย

37. ปูนซีเมนต์ปริมาตร 1,920π ลูกบาศก์เซนติเมตร ถูกหล่อเป็นรูปทรงเรขาคณิตสามมิติ ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 24 เซนติเมตร ดังรูป จากรูป จงหาค่าของ h + ℓ (TU ปี 64)



ปริมาตร $(V) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$1920\pi = \frac{2}{3}\pi(12^3) + \frac{1}{3}\pi(12^2)h$

$1920 = \frac{1}{3}(12)^2(24+h)$

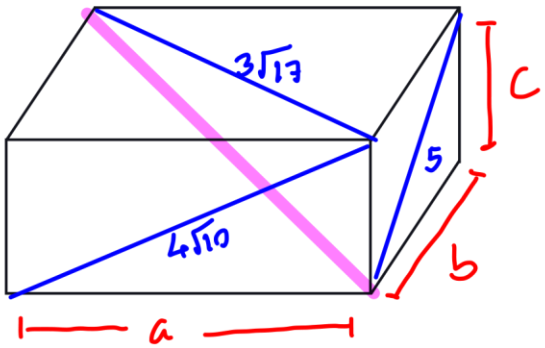
$\boxed{h = 16}$

$\ell = \sqrt{12^2+16^2} = 20$

$\therefore h + \ell = 36$

40. หน้าตรงข้ามแต่ละคู่ของกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากใบหนึ่ง มีเส้นทแยงมุมยาว 5, $4\sqrt{10}$ และ $3\sqrt{17}$ หน่วย จงหาว่าเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดของกล่องใบนี้มีความยาวกี่หน่วย

1. 12 2. 13 3. 14 4. 15



$a^2+b^2 = (3\sqrt{17})^2$ —①

$b^2+c^2 = 5^2$ —②

$a^2+c^2 = (4\sqrt{10})^2$ —③

①+②+③, $2a^2+2b^2+2c^2 = 153+25+160$

$a^2+b^2+c^2 = 169$

∴ เส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุด $= \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{169} = 13$ หน่วย

42. กำหนดให้ $0^\circ < \theta < 90^\circ$

ถ้า $\frac{3x}{3+4\sin^2\theta} + \frac{4x}{4+3\csc^2\theta} = \cot^2 60^\circ - \tan^2 45^\circ + \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

แล้ว $8^{x+\frac{1}{x}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$\frac{3x}{3+4\sin^2\theta} + \frac{4x}{4+\frac{3}{\sin^2\theta}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\frac{3x}{3+4\sin^2\theta} + \frac{4x}{\frac{4\sin^2\theta+3}{\sin^2\theta}} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{3x}{3+4\sin^2\theta} + \frac{4x\sin^2\theta}{3+4\sin^2\theta} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x(3+4\sin^2\theta)}{3+4\sin^2\theta} = \frac{1}{3}$$

$\therefore x = \frac{1}{3}$

$$\therefore 8^{x+\frac{1}{x}} = 8^{\frac{1}{3}+3} = 8^{\frac{10}{3}} = (2^3)^{\frac{10}{3}} = 2^{10} = 1024$$

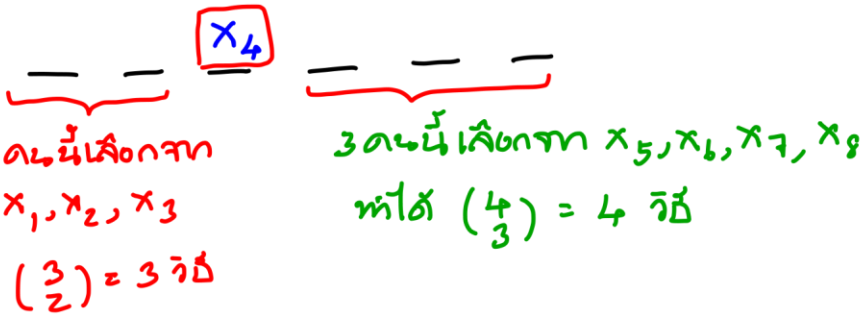
45. มีนักเรียน 8 คน อายุต่างกันทุกคน สุ่มนักเรียนมา 6 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่อายุน้อยลำดับที่ 4 ในกลุ่ม 8 คน เป็นคนที่อายุน้อยเป็นลำดับที่ 3 ในกลุ่ม 6 คนที่เลือกมา (TU)

$n(S) = \binom{8}{6} = 28$

หา $n(E)$: 8 คน เรียงอายุจากน้อยไปมาก เป็น

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$

Event ที่ต้องการคือ 6 คนที่เลือกมา เมื่อเรียงจากน้อยไปมาก จะเป็น



ดังนั้น $n(E) = 3 \times 4 = 12$

$\therefore P(E) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

46. ในการสร้างจำนวนเต็มบวกสี่หลัก ที่มีเลข 5 อยู่อย่างน้อยสองหลักและไม่มีเลข 9 อยู่ในหลักใดเลย จะสามารถสร้างจำนวนเต็มบวกดังกล่าวได้กี่วิธี (TU 5 มี.ค. 65)

1. 362
2. 364
3. 392
4. 394

ตัดเลข 9 ออกใส่เลย

ใช้เลขโดด 0-8 (9 ตัว)

สร้างเลข 4 หลักที่ไม่มีเงื่อนไข

ทำได้ $\underset{\neq 0}{8} \times 9 \times 9 \times 9 = 5,832$ จำนวน

สร้างเลข 4 หลักที่ไม่มีเลข 5 เลย ทำได้ $\underset{\neq 0}{7} \times 8 \times 8 \times 8 = 3,584$ จำนวน

(ใช้เลข 0-4, 6-8)

สร้างเลข 4 หลักที่มีเลข 5 อยู่ 1 หลัก

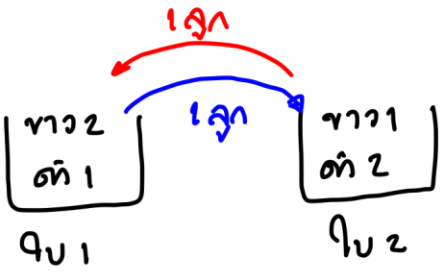
- กรณีเลข 5 อยู่หลักพัน : $\underset{=5}{1} \times \underset{\neq 5}{8} \times 8 \times 8 = 512$ จำนวน
- กรณีเลข 5 อยู่หลักร้อย : $\underset{\neq 0,5}{7} \times \underset{=5}{1} \times \underset{\neq 5}{8} \times 8 = 448$ จำนวน
- กรณีเลข 5 อยู่หลักสิบ : $\underset{\neq 0,5}{7} \times \underset{\neq 5}{8} \times \underset{=5}{1} \times \underset{\neq 5}{8} = 448$ จำนวน
- กรณีเลข 5 อยู่หลักหน่วย : $\underset{\neq 0,5}{7} \times \underset{\neq 5}{8} \times \underset{\neq 5}{8} \times \underset{=5}{1} = 448$ จำนวน

∴จำนวนที่มีเลข 5 อยู่อย่างน้อย 2 หลัก มี $5,832 - 3,584 - 512 - (448 \times 3)$

$= 392$ จำนวน

47. มีกล่อง 2 ใบ กล่องใบแรกมีลูกบอลสีขาว 2 ลูก สีดำ 1 ลูก กล่องใบที่สองมีลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีดำ 2 ลูก ทำการสุ่มหยิบลูกบอล 1 ลูกจากกล่องใบแรกไปใส่ในกล่องใบที่สอง จากนั้นทำการสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องใบที่สอง 1 ลูก ไปใส่คืนลงในกล่องใบแรก จงหาความน่าจะเป็นที่หลังจากสุ่มหยิบลูกบอลสองครั้ง แล้วจำนวนลูกบอลแต่ละสีในทั้งสองกล่องมีจำนวนเท่าเดิม (TU ปี 64)

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{7}{12}$ 4. $\frac{7}{24}$



* หลังหยิบแล้วจำนวนลูกบอลทั้ง 2 กล่อง เท่าเดิม แปลว่า การหยิบทั้ง 2 ครั้งได้สีเดียวกัน

กรณีที่ 1 : เป็นสีขาวทั้ง 2 ครั้ง

$$P(E_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$$

กรณีที่ 2 : เป็นสีดำทั้ง 2 ครั้ง

$$P(E_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$$

$$\therefore P(E) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

49. ต้นทุนในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งแบ่งออกเป็น 2 ส่วน โดยส่วนที่หนึ่งมีค่าคงที่ และส่วนที่สองจะแปรผันกับจำนวนสินค้าที่ผลิต เมื่อผลิตสินค้า 60 ชิ้น จะมีต้นทุนในการผลิต 4,200 บาท และถ้าผลิตสินค้า 80 ชิ้น จะมีต้นทุนในการผลิต 5,200 บาท ถ้าผลิตสินค้า 120 ชิ้น แล้วจะต้องขายสินค้าชิ้นละกี่บาทจึงจะได้กำไร 25% (TU ปี 64)

สมมุติให้ผลิต x ชิ้น และ y คือต้นทุนรวม

จะได้ $y = kx + C$ เมื่อ k และ C เป็นค่าคงที่

แทน $x = 60, y = 4,200$ จะได้ $4,200 = 60k + C$ —①

แทน $x = 80, y = 5,200$ จะได้ $5,200 = 80k + C$ —②

②−①, $1,000 = 20k \rightarrow \boxed{k = 50}$

แทน $k = 50$ ใน ①, $\boxed{C = 1200}$

ดังนั้นจะได้ $\boxed{y = 50x + 1,200}$

ถ้าผลิต 120 ชิ้น คิดเป็นต้นทุน $= 50(120) + 1,200 = 7,200$ บาท

เฉลี่ยทุนชิ้นละ $\frac{7200}{120} = 60$ บาท

∴ถ้าต้องการกำไร 25% ต้องขายชิ้นละ $\frac{125}{100}(60) = 75$ บาท

เตรียมความพร้อม เรียกความฟิต พิชิต TU86
เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

เฉลย SELF PRACTICE

ข้อ 1 **ตอบ** 1

α, β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

จากสูตรของวีตจะได้ว่า $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

α_1 , β_1 เป็นรากของสมการ $4ax^2 - 2bx + c = 0$

จากสูตรของวีตจะได้ว่า $\alpha_1 + \beta_1 = -\left(\frac{-2b}{4a}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{c}{4a} = \frac{1}{4}\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{1}{4}\alpha\beta$$

$$\therefore \quad 4\alpha_1^2 + 4\beta_1^2 = 4(\alpha_1^2 + \beta_1^2) = 4\left[\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1\right]$$

$$= 4\left[(\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1\beta_1\right]$$

$$= 4\left[\left(-\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\alpha\beta\right)\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 - \frac{1}{2}\alpha\beta\right]$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \alpha^2 + \beta^2$$

ข้อ 2 <u>ตอบ</u> 2

$a^3 + 12ab^2 = 679$ และ $9a^2b + 12b^3 = 978 \rightarrow 3a^2b + 4b^3 = 326$

$\therefore \quad a^2 - 4ab + 4b^2 = (a-2b)^2 = \left[(a-2b)^3\right]^{\frac{2}{3}}$

$$= \left[a^3 - 3a^2(2b) + 3(a)(2b)^2 - (2b)^3\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left[a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left[(a^3 + 12ab^2) - 2(3a^2b + 4b^3)\right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left[679 - 2(326)\right]^{\frac{2}{3}} = (679-652)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (27)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

ข้อ 3 <u>ตอบ</u> 1

จากสมการ $AM - GM$

$$AM \geq GM \rightarrow \frac{a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}}{6} \geq \sqrt[6]{(a^4)(b^4)(c^4)\left(\frac{1}{a^4}\right)\left(\frac{1}{b^4}\right)\left(\frac{1}{c^4}\right)}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq 6$$

$\therefore \quad a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}$ มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ 6

ข้อ 4 **ตอบ** 13

$$\frac{2}{a-3}+\frac{4}{a+3}+\frac{1}{a-2}+\frac{3}{a+2}=0$$

$$\frac{2(a+3)+4(a-3)}{(a-3)(a+3)}+\frac{a+2+3(a-2)}{(a-2)(a+2)}=0$$

$$\frac{6a-6}{a^2-9}+\frac{4a-4}{a^2-4}=0 \rightarrow \frac{6(a-1)}{a^2-9}+\frac{4(a-1)}{a^2-4}=0$$

$$(a-1)\left[\frac{6}{a^2-9}+\frac{4}{a^2-4}\right]=0 \rightarrow (a-1)\left[\frac{6(a^2-4)+4(a^2-9)}{(a^2-9)(a^2-4)}\right]=0$$

$$(a-1)\left[\frac{10a^2-60}{(a^2-9)(a^2-4)}\right]=0 \rightarrow (a-1)(10a^2-60)=0$$

$$(a-1)(a^2-6)=0 \rightarrow (a-1)(a-\sqrt{6})(a+\sqrt{6})=0 \rightarrow a=1,\sqrt{6},-\sqrt{6}$$

$\therefore$ ผลบวกกำลังสองของทุกค่า $a=(1)^2+(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{6})^2=1+6+6=13$

ข้อ 5 **ตอบ** 4

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=4 \rightarrow \frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=4$$

$$\frac{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=4 \rightarrow \frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}=4$$

$$\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=4 \rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \rightarrow x=60^\circ$$

$\therefore$ $\tan^2 x+4\cos^2 x=\tan^2 60^\circ+4\cos^2 60^\circ=(\sqrt{3})^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=3+1=4$

ข้อ 6 **ตอบ** $\frac{13}{6}$

$$6\sin^2 A - 11\sin A\cos A + 3\cos^2 A = 0 \rightarrow (2\sin A - 3\cos A)(3\sin A - \cos A) = 0$$

กรณีที่ 1 $2\sin A - 3\cos A = 0 \rightarrow 2\sin A = 3\cos A \rightarrow \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{2}$

$$\tan A = \frac{3}{2} \rightarrow \cot A = \frac{2}{3}$$

กรณีที่ 2 $3\sin A - \cos A = 0 \rightarrow 3\sin A = \cos A \rightarrow \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{3}$

$\tan A = \frac{1}{3}$ ใช้ไม่ได้ เพราะ $45^\circ < A < 90^\circ \rightarrow \tan A > 1$

$$\therefore \tan A + \cot A = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

ข้อ 7 **ตอบ** 3

$$\frac{1+\cos A - \sin A - \sin A\cos A}{\sin^2 A + \cos A(1-\cos^2 A)} = 12 \rightarrow \frac{(1+\cos A) - \sin A(1+\cos A)}{\sin^2 A + \cos A\sin^2 A} = 12$$

$$\frac{(1+\cos A)(1-\sin A)}{\sin^2 A(1+\cos A)} = 12 \rightarrow 1-\sin A = 12\sin^2 A \rightarrow 12\sin^2 A + \sin A - 1 = 0$$

$(4\sin A - 1)(3\sin A + 1) = 0 \rightarrow \sin A = \frac{1}{4}, \left(-\frac{1}{3}\right)$ ใช้ไม่ได้เพราะ $0 < \sin A < 1$

$$\therefore 4\tan^2 A\cos^2 A - 3\sin^2 A\cot^2 A = 4\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\cos^2 A - 3\sin^2 A\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

$$= 4\sin^2 A - 3\cos^2 A$$

$$= 4\sin^2 A - 3(1-\sin^2 A)$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 3\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{4}{16} - \frac{45}{16}$$

$$= -\frac{41}{16}$$

ข้อ 8 **ตอบ** 1

$5(8^x) + 3(2)^x + 8 = 2^{3x+4} \rightarrow 5(2^3)^x + 3(2)^x + 8 = 2^4 \times 2^{3x}$

$5(2^{3x}) + 3(2^x) + 8 = 16(2^{3x}) \rightarrow 11(2^{3x}) - 3(2^x) - 8 = 0$

$11(2^x)^3 - 3(2^x) - 8 = 0$

ให้ $A = 2^x$ จะได้

$11A^3 - 3A - 8 = 0 \rightarrow 11A^3 = 3A + 8$ (ตาไวๆ น้องจะเห็นเลยว่า $A = 1$ จะได้ $x = 0$ ทันที)

ให้ $P(A) = 11A^3 - 3A - 8$ พบว่า $P(1) = 0$ แสดงว่า $A - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(A)$

ใช้การหารสังเคราะห์หาตัวประกอบที่เหลือ

1	11	0	-3	-8
		11	11	8
	11	11	8	0

ดังนั้น $P(A) = (A-1)(11A^2 + 11A + 8) = 0$ แบ่งเป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 : $A - 1 = 0 \rightarrow A = 1 \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow x = 0$ ใช้ได้ เพราะ x เป็นจำนวนจริง

กรณีที่ 2 : $11A^2 + 11A + 8 = 0$ พบว่า A ไม่ใช่จำนวนจริง

เนื่องจาก $11^2 - 4(11)(8) < 0$ ดังนั้น ไม่มี x ที่เป็นจำนวนจริง

$\therefore \quad P = 100(x+8) = 100(0+8) = 800$

ข้อ 9 **<u>ตอบ</u>** 1

$(3^{x-1})(3^2)^{\frac{2}{x^2}} = 81$ มีจำนวนอตรรกยะ a และ b เป็นคำตอบ

$(3^{x-1})(3^{\frac{4}{x^2}}) = 3^4 \rightarrow 3^{x-1+\frac{4}{x^2}} = 3^4 \rightarrow x-1+\frac{4}{x^2} = 4$

$x-5+\frac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x^3-5x^2+4 = 0$

ให้ $P(x) = x^3-5x^2+4$ พบว่า $P(1) = 0$ แสดงว่า $(x-1)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

ใช้การหารสังเคราะห์หาตัวประกอบที่เหลือ

1	1	−5	0	4 +
	0	1	−4	−4
	1	−4	−4	0

$x^2 \quad -4x \quad -4$

ดังนั้น $P(x) = (x-1)(x^2-4x-4) = 0$ แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $x-1 = 0 \rightarrow x = 1$ ใช้ไม่ได้ เพราะ 1 ไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ

กรณีที่ 2 $x^2-4x-4 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-4(1)(-4)}}{2}$

$x = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \underset{a}{2+2\sqrt{2}}, \underset{b}{2-2\sqrt{2}}$

$\therefore \quad (a-b)^2 = \left[(2+2\sqrt{2})-(2-2\sqrt{2})\right]^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$

ข้อ 10 **ตอบ** 512

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+.....+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=m$$

$$\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{(2\sqrt{1}+1\sqrt{2})(2\sqrt{1}-1\sqrt{2})}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}+\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{(4\sqrt{3}+3\sqrt{4})(4\sqrt{3}-3\sqrt{4})}+.....$$

$$.....+\frac{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}{(100\sqrt{99}+99\sqrt{100})(10\sqrt{99}-99\sqrt{100})}=m$$

$$\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2^2\cdot 1-1^2\cdot 2}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3^2\cdot 2-2^2\cdot 3}+\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{4^2\cdot 3-3^2\cdot 4}+.....+\frac{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}{100^2\cdot 99-99^2\cdot 100}=m$$

$$\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2\cdot 1(2-1)}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\cdot 2(3-2)}+\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{4\cdot 3(4-3)}+.....+\frac{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}{100\cdot 99(100-99)}=m$$

$$\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2\cdot 1}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\cdot 2}+\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{4\cdot 3}+.....+\frac{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}{100\cdot 99}=m$$

$$\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}-\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}+\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}-\frac{\cancel{\sqrt{4}}}{\cancel{4}}+.....+\frac{\cancel{\sqrt{99}}}{\cancel{99}}-\frac{\sqrt{100}}{100}=m$$

$$1-\frac{10}{100}=m\rightarrow m=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}\quad\therefore\quad 1024^m=(2^{10})^{\frac{9}{10}}=2^9=512$$

ข้อ 11 **ตอบ** 19%

ให้ทุน x บาท และกำไรจากเสื้อคุณภาพดี k%

สำหรับเสื้อคุณภาพดี กำไร $= 5\left(\frac{k}{100}\right)(x)$

สำหรับเสื้อมีตำหนิ ขาดทุน $= 15\left(\frac{5}{100}\right)(x)$

กำไรรวม $= 5\left(\frac{k}{100}\right)(x) - 15\left(\frac{5}{100}\right)(x)$

ต้องให้ได้กำไร 20%

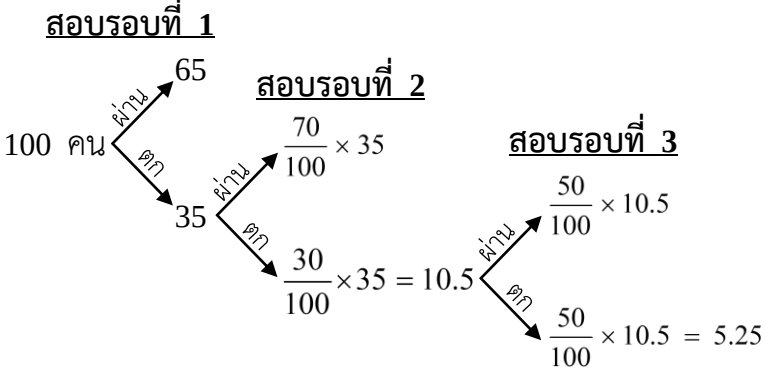
$$5\left(\frac{k}{100}\right)(x) - 15\left(\frac{5}{100}\right)(x) = \frac{20}{100}x$$

คูณ $\frac{100}{x}$ ทั้ง 2 ข้าง

$5k - 75 = 20 \rightarrow k = 19$

ข้อ 12 **ตอบ** 5.25%

สมมติเริ่มต้นสอบมี 100 คน



แสดงว่า ถ้ามี 100 คน ตกทั้ง 3 รอบ 5.25 คน

$\therefore$ คิดเป็น 5.25%

ข้อ 13 **ตอบ** –180

จาก $xy+2x+y = 7$

$xy+2x+y+2 = 7+2$

$x(y+2)+(y+2) = 9$

$(x+1)(y+2) = 9$ ——(1)

จาก $yz+3y+2z = 12$

$yz+3y+2z+6 = 12+6$

$y(z+3)+2(z+3) = 18$

$(y+2)(z+3) = 18$ ——(2)

จาก $zx+z+3x = 15$

$zx+z+3x+3 = 15+3$

$z(x+1)+3(x+1) = 18$

$(z+3)(x+1) = 18$ ——(3)

$\frac{(1)\times(3)}{(2)}$, $(x+1)^2 = \frac{9\times 18}{18} \rightarrow (x+1)^2 = 9$

$x+1 = 3,-3 \rightarrow x = 2,-4 \quad (x<0)$

แทน x ใน $(1),(3) \rightarrow y=-5$, $z=-9$

$\therefore \quad xyz = (-4)(-5)(-9) = -180$

ข้อ 14 **<u>ตอบ</u>** 116 เมตร

จากโจทย์ $V_{แดง} = \frac{100}{t}$, $V_{ดำ} = \frac{90}{t}$

และ $t_{เขียว} = t_{แดง}$

$$\frac{S_{เขียว}}{V_{เขียว}} = \frac{S_{แดง}}{V_{แดง}}$$

$$\frac{200}{V_{เขียว}} = \frac{190}{\frac{100}{t}} \rightarrow V_{เขียว} = \frac{2,000}{19t}$$

และ $t_{เขียว} = t_{ดำ}$ (สมมติต่อให้ x เมตร)

$$\frac{S_{เขียว}}{V_{เขียว}} = \frac{S_{ดำ}}{V_{ดำ}}$$

$$\frac{800}{\frac{2,000}{19t}} = \frac{800-x}{\frac{90}{t}} \rightarrow \frac{800 \times 19}{2,000} = \frac{800-x}{90}$$

$$684 = 800 - x$$

$$x = 116 \text{ เมตร}$$

ข้อ 15 **ตอบ** 2

Med

a b 20 c d

กรณีพิสัยสูงสุด ต้องให้ a ต่ำสุด และให้ b, c ต่ำสุดด้วย จึงจะได้ค่า d มากสุด ($\bar{x}$ คงที่)

จะได้ว่า $a = 10$, $b = 1$, $c = 20$

$10, 11, 20, 20, d$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} \rightarrow 18 = \frac{10+11+20+20+d}{5} \rightarrow d = 29$$

และพิสัยสูงสุด $= 29-10 = 19$

กรณีพิสัยต่ำสุด ต้องให้ d ต่ำสุด

จะได้ว่า $d = 20$ ดังนั้น $c = 20$ ด้วย

และจะได้ว่า $$18 = \frac{a+b+20+20+20}{5}$$

$$a+b = 30$$

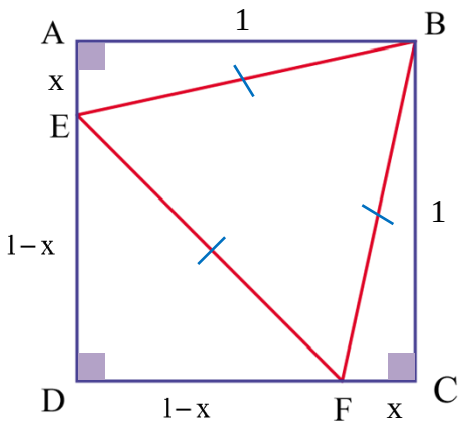
จะให้ a มากสุด $\therefore$ ให้ $a = b = 15$

พิสัยต่ำสุด $= 20-15 = 5$

ดังนั้น พิสัยสูงสุด – พิสัยต่ำสุด $= 19-5$

$= 14$

ข้อ 16 **ตอบ** 4



จาก ΔABE , $BE^2 = x^2+1$

จาก ΔDEF , $EF^2 = (1-x)^2 + (1-x)^2$

และ $EF^2 = BE^2$

จะได้ $(1-2x+x^2)(2) = x^2+1$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

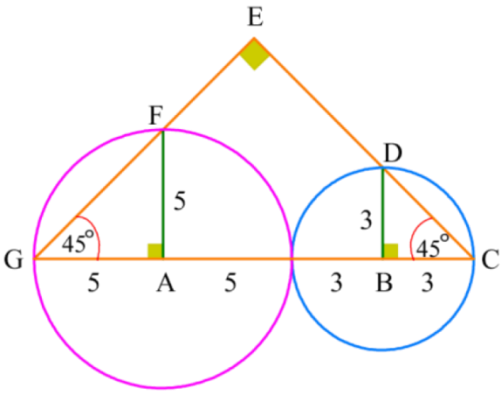
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$$

ใช้ไม่ได้

$\therefore \overline{AE} \cdot \overline{ED} = x(1-x) = (2-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})$

$= 3\sqrt{3}-5$

ข้อ 17 **ตอบ** 2



จาก ΔAGF และ ΔBCD พบว่า

$A\hat{G}F = B\hat{C}D = 45^\circ \quad \therefore C\hat{E}G = 90^\circ$

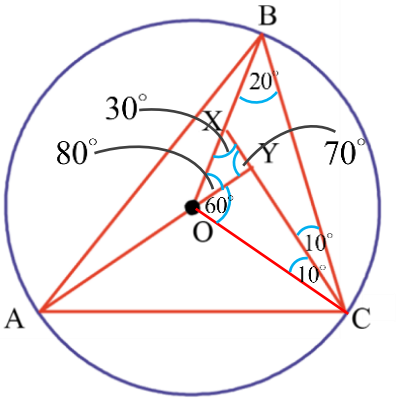
ให้ $GE = EC = x$

จาก ΔCEG, $x^2 + x^2 = 16^2$

$2x^2 = 256 \rightarrow x^2 = 128 \quad \therefore x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\therefore$ เส้นรอบรูป $\Delta CEG = 16 + 16\sqrt{2}$ หน่วย

ข้อ 18 **ตอบ** 70°



จาก ΔOXY , $X\hat{O}Y = 80^\circ$

จาก ΔBXC , $X\hat{B}C + B\hat{C}X = C\hat{X}O$

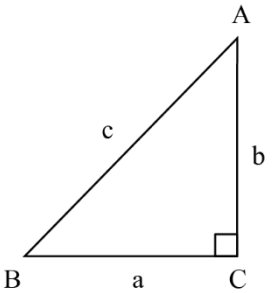
จะได้ $X\hat{B}C = 20^\circ$

จาก $\overline{OC}$ ทำให้ $O\hat{C}Y = 10^\circ$

จาก ΔBOC , $B\hat{O}C = 180^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 140^\circ$

$\therefore B\hat{A}C = \frac{1}{2}(B\hat{O}C) = 70^\circ$

ข้อ 19 **ตอบ** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ตร.หน่วย



จากโจทย์ $a + b + c = 6 + 4\sqrt{3}$ —— (1)

$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{147}{2}$ และ $a^2 + b^2 = c^2$

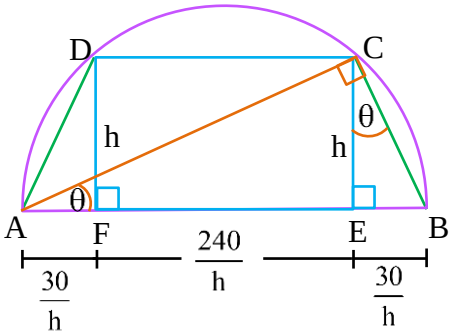
$c^2 + c^2 = \frac{147}{2} \rightarrow c^2 = \frac{147}{4} \rightarrow \boxed{c = \frac{7\sqrt{3}}{2}}$

แทนใน c ใน (1) , $a + b + \frac{7\sqrt{3}}{2} = 6 + 4\sqrt{3} \rightarrow \boxed{a + b = 6 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore$ พ.ท. $\Delta ABC = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}(2ab) = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\right]$

$= \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - c^2\right] = \frac{1}{4}\left[\left(6 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{147}{4}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ตร.หน่วย

ข้อ 20 **ตอบ** 9



จาก พ.ท. $\Delta ABC = 150$

$$\frac{1}{2}(AB)h = 150 \rightarrow AB = \frac{300}{h}$$

จาก พ.ท. $\Delta ACD = 120$

$$\frac{1}{2}(CD)h = 120 \rightarrow DC = \frac{240}{h}$$

$$\tan\theta = \boxed{\frac{CE}{AE} = \frac{EB}{CE}} \rightarrow CE^2 = (AE)(EB) \rightarrow h^2 = \left(\frac{270}{h}\right)\left(\frac{30}{h}\right)$$

$$h^4 = 8100 \rightarrow \boxed{h = 3\sqrt{10}}$$

จาก ΔBCE, $BC^2 = h^2 + \left(\frac{30}{h}\right)^2 = 90 + 10 \rightarrow BC = 10$

เส้นรอบรูป $\square ABCD = 10 + 10 + 10\sqrt{10} + 8\sqrt{10} = 20 + 18\sqrt{10}$

ดังนั้น $a\sqrt{b} + c = 10 + 9\sqrt{10} \rightarrow a = 9,\ b = 10,\ c = 10$

$\therefore$ $a - b + c = 9$

****