

ติวเข้ม คณิตศาสตร์ ม.2
โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
เฉลยโจทย์ที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

ข้อ 17 ตอบ 54 ตัว

$$\text{จาก } \frac{\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1\right)}{\left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1\right)} = 13 \rightarrow \frac{a\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)}{b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)} = 13$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 13 \rightarrow a = 13b$$

$$\text{และจาก } a + 3b + c \leq 50$$

$$\text{จะได้ว่า } 13b + 3b + c \leq 50$$

$$16b + c \leq 50$$

$$\text{กรณี } b = 1 \rightarrow a = 13(1) = 13$$

$$\text{และ } 16(1) + c \leq 50$$

$$c \leq 34 \quad \therefore c = 1, 2, 3, \dots, 34$$

ดังนั้น กรณีนี้ $(a, b, c) = (13, 1, 1), (13, 1, 2), \dots, (13, 1, 34)$ รวมทั้งหมด 34 ตัว

$$\text{กรณี } b = 2 \rightarrow a = 13(2) = 26$$

$$\text{และ } 16(2) + c \leq 50$$

$$c \leq 18 \quad \therefore c = 1, 2, 3, \dots, 18$$

ดังนั้น กรณีนี้ $(a, b, c) = (26, 2, 1), (26, 2, 2), \dots, (26, 2, 18)$ รวมทั้งหมด 18 ตัว

$$\text{กรณี } b = 3 \rightarrow a = 13(3) = 39$$

$$\text{และ } 16(3) + c \leq 50$$

$$c \leq 2 \quad \therefore c = 1, 2$$

ดังนั้น กรณีนี้ $(a, b, c) = (39, 3, 1), (39, 3, 2)$ รวมทั้งหมด 2 ตัว

ดังนั้น (a, b, c) มีรวมทั้งหมด $34 + 18 + 2 = 54$ ตัว

ข้อ 18 ตอบ 1005

ให้ $k = 20102009$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{k^2}{(k-1)^2 + (k+1)^2 - 2} = \frac{k^2}{[(k-1)^2 - 1] + [(k+1)^2 - 1]} \\
 &= \frac{k^2}{[(k-1-1)(k-1+1)] + [(k+1-1)(k+1+1)]} \\
 &= \frac{k^2}{(k-2)(k) + (k)(k+2)} \\
 &= \frac{k^2}{k(k-2+k+2)} \\
 &= \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k}(2\cancel{k})} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore 2010A = 2010 \cdot \frac{1}{2} = 1005$$

ข้อ 19 ตอบ $\frac{21}{4}$

$$\text{ให้ } A = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \dots}}} \rightarrow A = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \dots}}} \rightarrow A$$

$$\therefore A = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{A}}$$

$$A = 3 + \frac{1}{\frac{2A+1}{A}}$$

$$A = 3 + \frac{A}{2A+1}$$

นำ $2A+1$ คูณ 2 ข้าง

$$2A^2 + A = 6A + 3 + A$$

$$2A^2 - 6A - 3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(2)(-3)}}{2(2)} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{60}}{4}
 \end{aligned}$$

แต่จากโจทย์ $A > 0$

$$\therefore A = \frac{6+\sqrt{60}}{4} \text{ เท่านั้น } \left(\frac{6-\sqrt{60}}{4} < 0 \right)$$

$$= \frac{6}{4} + \frac{\sqrt{60}}{4}$$

$$= \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{60}{16}}$$

$$= \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{15}{4}}$$

$$a = \frac{3}{2}, b = \frac{15}{4} \text{ จะได้ } a+b = \frac{3}{2} + \frac{15}{4} = \frac{21}{4}$$

ข้อ 20 ตอบ 6

เศษจากการหาร $2^{145} + 5^{168} + 3^{247}$ ด้วย 7

= เศษจากการหาร 2^{145} ด้วย 7 + เศษจากการหาร 5^{168} ด้วย 7 + เศษจากการหาร 3^{247} ด้วย 7

โดยถ้าผลบวกของเศษด้านขวาของสมการมากกว่าหรือเท่ากับ 7 ให้หารด้วย 7 แล้วนำเศษมาตอบ

พิจารณาเศษจากการหาร 2^{145} ด้วย 7

$$\left. \begin{array}{l}
 2^1 \text{ หารด้วย 7 เศษ 2} \\
 2^2 \text{ หารด้วย 7 เศษ 4} \\
 2^3 \text{ หารด้วย 7 เศษ 1} \\
 2^4 \text{ หารด้วย 7 เศษ 2} \\
 2^5 \text{ หารด้วย 7 เศษ 4} \\
 2^6 \text{ หารด้วย 7 เศษ 1} \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{เศษจากการหาร } 2^n \text{ ด้วย 7} \\
 = \left\{ \begin{array}{l}
 2, n \text{ หารด้วย 3 เศษ 1} \\
 4, n \text{ หารด้วย 3 เศษ 2} \\
 1, n \text{ หารด้วย 3 ลงตัว}
 \end{array} \right. \\
 \therefore \text{ เศษจากการหาร } 2^{145} \text{ ด้วย 7} \\
 \text{ตอบ 2 เพราะ 145 หารด้วย 3 เศษ 1}
 \end{array}$$

พิจารณาเศษจากการหาร 5^{168} ด้วย 7

$$\begin{array}{l}
 5^1 \text{ หารด้วย 7 เศษ 5} \\
 5^2 \text{ หารด้วย 7 เศษ 4} \\
 5^3 \text{ หารด้วย 7 เศษ 6} \\
 5^4 \text{ หารด้วย 7 เศษ 2} \\
 5^5 \text{ หารด้วย 7 เศษ 3} \\
 5^6 \text{ หารด้วย 7 เศษ 1} \\
 5^7 \text{ หารด้วย 7 เศษ 5} \\
 5^8 \text{ หารด้วย 7 เศษ 4} \\
 \vdots
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 5^1 \\ 5^2 \\ 5^3 \\ 5^4 \\ 5^5 \\ 5^6 \\ 5^7 \\ 5^8 \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{เศษจากการหาร } 5^n \text{ ด้วย 7} \\
 = \left\{ \begin{array}{l} 5, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 1} \\ 4, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 2} \\ 6, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 3} \\ 2, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 4} \\ 3, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 5} \\ 1, n \text{ หารด้วย 6 ลงตัว} \end{array} \right. \\
 \therefore \text{ เศษจากการหาร } 5^{168} \text{ ด้วย 7} \\
 \text{ตอบ 1 เพราะ 168 หารด้วย 6 ลงตัว}
 \end{array}$$

พิจารณาเศษจากการหาร 3^{247} ด้วย 7

$$\begin{array}{l}
 3^1 \text{ หารด้วย 7 เศษ 3} \\
 3^2 \text{ หารด้วย 7 เศษ 2} \\
 3^3 \text{ หารด้วย 7 เศษ 6} \\
 3^4 \text{ หารด้วย 7 เศษ 4} \\
 3^5 \text{ หารด้วย 7 เศษ 5} \\
 3^6 \text{ หารด้วย 7 เศษ 1} \\
 3^7 \text{ หารด้วย 7 เศษ 3} \\
 3^8 \text{ หารด้วย 7 เศษ 2} \\
 \vdots
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3^1 \\ 3^2 \\ 3^3 \\ 3^4 \\ 3^5 \\ 3^6 \\ 3^7 \\ 3^8 \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{เศษจากการหาร } 3^n \text{ ด้วย 7} \\
 = \left\{ \begin{array}{l} 3, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 1} \\ 2, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 2} \\ 6, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 3} \\ 4, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 4} \\ 5, n \text{ หารด้วย 6 เศษ 5} \\ 1, n \text{ หารด้วย 6 ลงตัว} \end{array} \right. \\
 \therefore \text{ เศษจากการหาร } 3^{247} \text{ ด้วย 7} \\
 \text{ตอบ 3 เพราะ 247 หารด้วย 6 เศษ 1}
 \end{array}$$

$$\text{เศษจากการหาร } 2^{145} + 5^{168} + 3^{247} \text{ ด้วย 7} = 2 + 1 + 3 = 6$$

ข้อ 21 ตอบ 14

ขอเพิ่มโจทย์ “ k และ r เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่าหรือเท่ากับ 0”

ถ้า A หาด้วย B ลงตัว

แสดงว่า $A = B \cdot k$ โดย k เป็นจำนวนเต็ม

เช่น 12 หาด้วย 4 ลงตัว

แสดงว่า $12 = 4 \cdot 3$

จากโจทย์ $ab = 3c \cdot k_1$ โดย k_1 เป็นจำนวนเต็ม ——(1)

และ $ac = 13b \cdot k_2$ โดย k_2 เป็นจำนวนเต็ม ——(2)

และ $bc = 7a \cdot k_3$ โดย k_3 เป็นจำนวนเต็ม ——(3)

$(1) \times (2) \times (3)$

$$ab \cdot ac \cdot bc = 3c \cdot k_1 \cdot 13b \cdot k_2 \cdot 7a \cdot k_3$$

$$(abc)^2 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot abc \cdot k_1 k_2 k_3$$

หาด้วย abc 2 ข้าง

$$abc = 273 \cdot k_1 k_2 k_3$$

ให้ $k_1 k_2 k_3 = k_4$ โดย k_4 จะเป็นจำนวนเต็ม

$$abc = 273k_4$$

จะหาค่าต่ำสุดของ abc ที่ทำให้เขียนในรูป $ak^2 + r$

โดย k, r เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่าหรือเท่ากับ 0, $r < 9$

เริ่มจาก $k_4 = 1$

$$abc = 273 = 9(30) + 3$$

พบว่า $30 \neq k^2$ โดย k เป็นจำนวนเต็ม

$$k_4 = 2$$

$$\begin{aligned} abc &= (273)(2) = (9(30) + 3) \cdot 2 \\ &= 9(60) + 6 \end{aligned}$$

พบว่า $60 \neq k^2$ โดย k เป็นจำนวนเต็ม

$$k_4 = 3$$

$$\begin{aligned} abc &= (273)(3) = (9(30) + 3) \cdot 3 \\ &= 9(90) + 9 = 9(91) + 0 \end{aligned}$$

พบว่า $91 \neq k^2$ โดย k เป็นจำนวนเต็ม

$$k_4 = 4$$

$$\begin{aligned} abc &= (273)(4) = (9(30) + 3) \cdot 4 \\ &= 9(120) + 12 \\ &= 9(120) + 9 + 3 \\ &= 9(121) + 3 \end{aligned}$$

พบว่า $121 = k^2$ โดย $k = 11$

ดังนั้น $abc = 273(4)$

และ $k = 11, r = 3$

$$k+r = 14$$

ข้อ 22 ตอบ 146

สังเกตได้ว่า

$$\textcircled{1} \rightarrow 1 \quad \text{แถวที่ 1}$$

$$2 \quad 3 \quad \textcircled{4} \rightarrow 2^2 \quad \text{แถวที่ 2}$$

$$5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \textcircled{9} \rightarrow 3^2 \quad \text{แถวที่ 3}$$

$$10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad \textcircled{16} \rightarrow 4^2 \quad \text{แถวที่ 4}$$

ดังนั้น แถวที่ 11 จะมีตัวท้าย $11^2 = 121$

แสดงว่า 122 คือตัวแรกของแถวที่ 12 และ ตัวที่จะตรงกับ 122 ในแนวดิ่ง

และอยู่ข้างล่างลงไป 1 แถว คือตัวที่ 2 ของแถวที่ 13

การหาตัวที่ 2 ของแถวที่ 13

ตัวท้ายสุดของแถวที่ 12 คือ $12^2 = 144$ ดังนั้น ตัวแรกของแถวที่ 13 คือ 145

และตัวที่ 2 ของแถวที่ 13 คือ 146

ข้อ 23 ตอบ 168

ให้มีกล่องละ x ลูก

จะได้ว่า (1) x หารด้วย 3 เหลือเศษ 2

แสดงว่า $x+4$ หารด้วย 3 ลงตัว

(2) x หารด้วย 5 เหลือเศษ 1

แสดงว่า $x+4$ หารด้วย 5 ลงตัว

$\therefore x+4$ หารด้วย 15 ลงตัว

ซึ่งถ้า $x \leq 100$ จะได้

$$x+4 = 15, 30, 45, 60, 75, 90$$

$$x = 11, 26, 41, 56, 71, 86$$

(3) x หารด้วย 7 ลงตัว

$$\text{ดังนั้น } x = 56$$

$$3 \text{ กล่องรวมกันมีบอล} = 56 \times 3 = 168 \text{ ลูก}$$

ข้อ 24 ตอบ 198

เนื่องจากผลคูณต้องมีหลักหน่วยเป็น 2

$$\text{พิจารณาเฉพาะหลักหน่วย พบว่า } (__4) \times (__6) \times (__8) = __2$$

แสดงว่าจำนวนคู่ทั้งสามจำนวนจะมีหลักหน่วยเป็น 4, 6, 8

$$\left. \begin{array}{l} \text{เนื่องจาก } 60 \times 60 \times 60 = 216,000 \\ \text{และ } 70 \times 70 \times 70 = 343,000 \end{array} \right\} \text{แสดงว่า } 60 < \text{จำนวนทั้ง 3} < 70 \text{ แน่ๆ}$$

ดังนั้น จำนวนทั้งสามจำนวนคือ 64, 66 และ 68

$$\therefore \text{ผลบวกสามจำนวนดังกล่าว} = 64 + 66 + 68 = 198$$

ข้อ 25 ตอบ 84

จากโจทย์ จะได้ว่า $100 \leq 3A \leq 999$

$$33.333... \leq A \leq 333 \quad \text{---(1)}$$

และ $1,000 \leq 4A \leq 9,999$

$$250 \leq A \leq 2,499.75 \quad \text{---(2)}$$

จาก (1) และ (2) : $250 \leq A \leq 333$

$250, 251, \dots, 333$ มีทั้งหมด $333 - 250 + 1 = 84$

$\therefore A$ ที่เป็นจำนวนเต็มบวกและสอดคล้องกับเงื่อนไขมี 84 จำนวน
