เฉลยข้อสอบ ความถนัดทางคณิตศาสตร์ PAT1

ตอนที่ 1 : แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้องที่สุด

จำนวน 35 ข้อ (ข้อ 1 - 35) ข้อละ 6 คะแนน

1. **ตอบ** 3

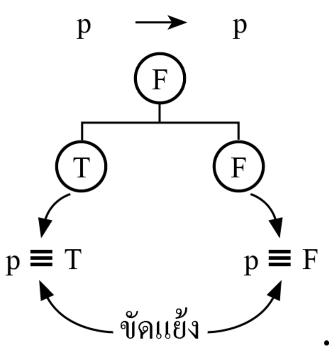
วิธีทำ

พิจารณาคำตอบที่ 1

$(p \to p) \wedge (q \to (q \vee \sim q))$ จะเป็นสัจนิรันดร์

เมื่อ $p \to p$ เป็นสัจนิรันดร์ และ $(q \to (q \vee \sim q))$ เป็นสัจนิรันดร์

สมมุติให้ $p \to p \equiv F$ พบว่า



$\therefore$ $p \to p$ เป็นสัจนิรันดร์

และเราพบว่า $(q \vee \sim q) \equiv T$

ดังนั้น $q \to \underset{T}{(q \vee \sim q)} \equiv T$ เสมอ $(? \to T \equiv T)$

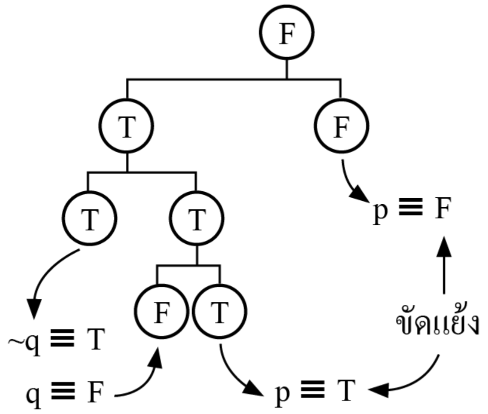
$\therefore$ $q \to (q \vee \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น $(p \to p) \wedge (q \to (q \vee \sim q))$ เป็นสัจนิรันดร์

พิจารณาคำตอบที่ 2

สมมุติให้ $(\sim q \wedge (q \vee p)) \rightarrow p \equiv F$ พบว่า

$(\sim q \;\wedge\; (q \vee p)) \longrightarrow p$

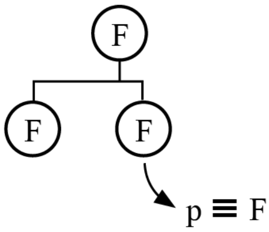


$\therefore$ $(\sim q \wedge (q \vee p)) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์

พิจารณาคำตอบที่ 3

สมมุติให้ $[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee p \equiv F$ พบว่า

$[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee p$



เมื่อ $p \equiv F$ เราจะได้ว่า

$(p \vee q) \wedge \sim q \equiv q \wedge \sim q$

F

$\equiv F$ (ไม่ขัดแย้ง)

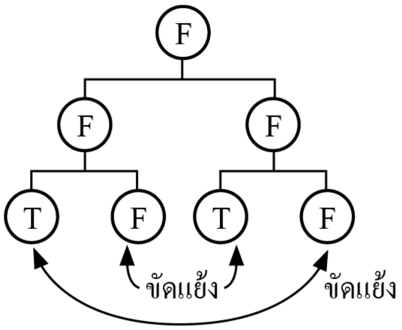
พบว่า ประพจน์ในคำตอบที่ 3 นี้เป็นเท็จได้

$\therefore$ $[(p \vee q) \wedge \sim q] \vee p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

พิจารณาคำตอบที่ 4

สมมุติให้ $(q \rightarrow p) \vee (p \rightarrow q) \equiv F$ พบว่า

$(q \longrightarrow p) \vee (p \longrightarrow q)$



$\therefore$ $(q \rightarrow p) \vee (p \rightarrow q)$ เป็นสัจนิรันดร์

พิจารณาคำตอบที่ 5

$$\begin{array}{ccc} p \wedge (\sim p \vee q) & \longleftrightarrow & \sim (p \longrightarrow \sim q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \vee (p \wedge q) & & \sim (\sim p \vee \sim q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p \wedge q & & p \wedge q \end{array}$$

เหมือนกัน

$\therefore$ $p \wedge (\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim (p \rightarrow \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์

2. **<u>ตอบ</u>** 3

<u>วิธีทำ</u>

พิจารณา $$2^{2x+1}-7\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+3 \geq 0$$

$$2^{2x}\cdot 2^{1}-7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+3 \geq 0$$

$$2\cdot 2^{2x}-7\cdot\frac{1}{2^{2x}}\cdot\frac{1}{8}+3 \geq 0$$

นำ $8\cdot 2^{2x}$ คูณ 2 ข้าง

$$16\cdot(2^{2x})^{2}-7+24\cdot 2^{2x} \geq 0$$

แทน $2^{2x} = A$

$$16A^{2}-7+24A \geq 0$$

$$16A^{2}+24A-7 \geq 0$$

$$(4A+7)(4A-1) \geq 0$$

เมื่อ $A = 2^{2x} \rightarrow 4A+7 = 4\cdot 2^{2x}+7$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอ

จึงนำ $(4A+7)$ หารออก 2 ข้าง

$$4A-1 \geq 0$$

$$4A \geq 1$$

$$A \geq \frac{1}{4}$$

$$2^{2x} \geq \frac{1}{4}$$

$$2^{2x} \geq 2^{-2}$$

$$2x \geq -2$$

$$x \geq -1$$

$\forall x\left[2^{2x+1}-7\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+3 \ge 0\right]$ จะมีความหมายเดียวกับ $\forall x\left[x \in [-1, \infty)\right]$

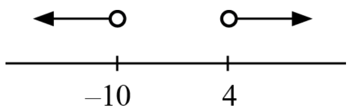
นั่นหมายความว่า เอกภพสัมพัทธ์ที่จะทำให้ประพจน์นี้เป็นจริง ต้องเป็นสับเซตของ $[-1, \infty)$

เพราะทุกค่าของสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์จะอยู่ใน $[-1, \infty)$

พิจารณา คำตอบที่ 1 $|x+3| > 7$

$x+3 > 7$ <u>หรือ</u> $x+3 < -7$

$x > 4 \;\cup\; x < -10$



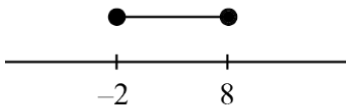
ผิด

พิจารณา คำตอบที่ 2 $|x-3| \le 5$

$-5 \le x-3 \le 5$

บวก 3

$-2 \le x \le 8$



ผิด

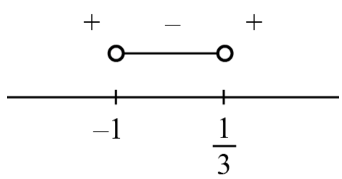
พิจารณา คำตอบที่ 3 $|x-1| > |2x|$ *

$[(x-1)-2x]\cdot[(x-1)+2x] > 0$

$[-x-1]\cdot[3x-1] > 0$

คูณ –1

$[x+1][3x-1] < 0$



พบว่า $\left(-1, \frac{1}{3}\right) \subset [-1, \infty)$ ดังนั้นถูก

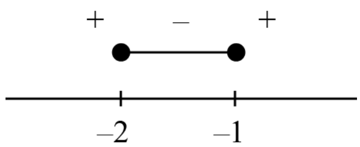
* รูปแบบ $|a| > |b|$ จะได้ $(a-b)(a+b) > 0$

พิจารณา คำตอบที่ 4 $|x+1|+|x+2| = 1$

จากรูปแบบ $|a|+|b| = |a-b|$ เมื่อ $a \cdot b \le 0$

เราได้ว่า $|x+1|+|x+2| = |(x+1)-(x+2)|$

$\therefore \quad (x+1)(x+2) \le 0$



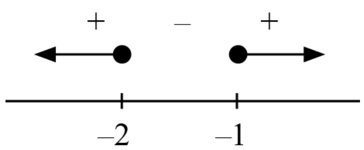
ผิด

พิจารณาคำตอบที่ 5 $|x+1|+|x+2| = |2x+3|$

จากรูปแบบ $|a|+|b| = |a+b|$ เมื่อ $a \cdot b \ge 0$

จะได้ว่า $|x+1|+|x+2| = |(x+1)+(x+2)|$

$\therefore \quad (x+1)(x+2) \ge 0$



ผิด

3. **<u>ตอบ</u>** 5

<u>วิธีทำ</u>

จาก $|\square| \le a \rightarrow -a \le \square \le a$

$-a \le \square$ และ $\square \le a$

พิจารณา A

จากโจทย์ $x \ge |x^3 - x|$

$|x^3 - x| \le x$

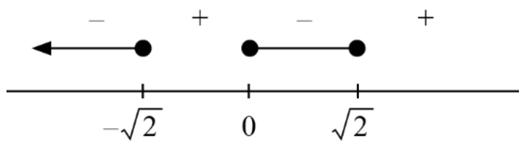
$-x \le x^3 - x \le x$

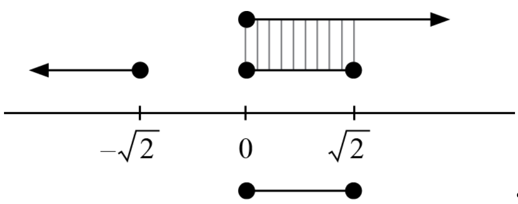
$-x \le x^3 - x$ <u>และ</u> $x^3 - x \le x$

$0 \le x^3$ $\quad\cap\quad$ $x^3 - 2x \le 0$

$\sqrt[3]{0} \le \sqrt[3]{x^3}$ $\qquad (x)(x^2 - 2) \le 0$

$0 \le x$ $\qquad (x)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \le 0$





$\therefore\ A = \{1\}$

จาก $|\square| > a \rightarrow \square > a$ หรือ $\square < -a$

พิจารณา B

จากโจทย์ $3x^2 - |10x-3| < 0$

$$3x^2 < |10x-3|$$

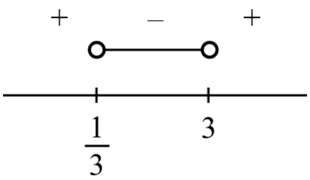
$$|10x-3| > 3x^2$$

$10x - 3 > 3x^2$ <u>หรือ</u> $\cup$ $10x - 3 < -3x^2$

$0 > 3x^2 - 10x + 3$

$3x^2 - 10x + 3 < 0$

$(3x-1)(x-3) < 0$



$3x^2 + 10x - 3 < 0$

นำ 3 หาร

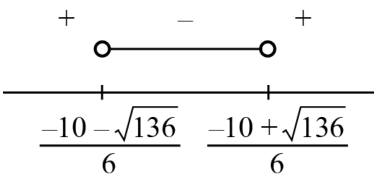
$$x^2 + \frac{10}{3}x - 1 < 0$$

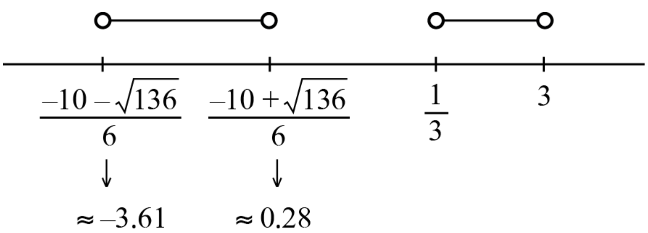
$$\left(x^2 + 2x\left(\frac{10}{6}\right) + \frac{100}{36}\right) - \frac{136}{36} < 0$$

$$\left(x + \frac{10}{6}\right)^2 - \frac{136}{36} < 0$$

$$\left(x + \frac{10}{6}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{136}}{6}\right)^2 < 0$$

$$\left(x + \frac{10}{6} - \frac{\sqrt{136}}{6}\right)\left(x + \frac{10}{6} + \frac{\sqrt{136}}{6}\right) < 0$$





$\therefore \quad B = \{-3, -2, -1\}$

$A \cup B = \{-3, -2, -1, 1\}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน $A \cup B = (-3) + (-2) + (-1) + 1$

$$= -5$$

4. **<u>ตอบ</u>** 2

<u>วิธีทำ</u>

$x = 1+\log_a(bc) = \log_a a+\log_a(bc) = \log_a(abc)$

$y = 1+\log_b(ca) = \log_b b+\log_b(ca) = \log_b(abc)$

$z = 1+\log_c(ab) = \log_c c+\log_c(ab) = \log_c(abc)$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{\log_a(abc)}+\frac{1}{\log_b(abc)}+\frac{1}{\log_c(abc)}$$

$$= \log_{abc}(a)+\log_{abc}(b)+\log_{abc}(c) = \log_{abc}(abc) = 1$$

ดังนั้น $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz} = 1$$

$$\frac{xyz}{xy+yz+zx} = 1$$

$$\therefore \frac{2xyz}{xy+yz+zx} = 2$$

5. **<u>ตอบ</u>** 2

<u>วิธีทำ</u>

พิจารณา A

หา R_{r_1} จากการพิจารณา $\sqrt{49-5x^2}$ พบว่า มากที่สุดมีค่าเท่ากับ 7 และมีค่ามากกว่า 0 (เท่ากับ 0 ไม่ได้ เพราะเศษส่วน ส่วนต้อง $\neq 0$)

ดังนั้น $0 < \sqrt{49-5x^2} \leq 7$

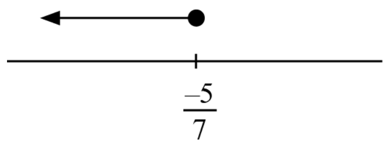
$$\frac{1}{\sqrt{49-5x^2}} \geq \frac{1}{7}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < a \leq b \\ \therefore \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \end{array}}$$

นำ –5 คูณ 2 ข้าง

$$\frac{-5}{\sqrt{49-5x^2}} \leq \frac{-5}{7}$$

$$y \leq \frac{-5}{7}$$



$$R_{r_1} = \left(-\infty, \frac{-5}{7}\right]$$

จาก $D_{r_1^{-1}} = R_{r_1}$

$$\therefore\ A = D_{r_1^{-1}} = R_{r_1} = \left(-\infty, \frac{-5}{7}\right]$$

พิจารณา B

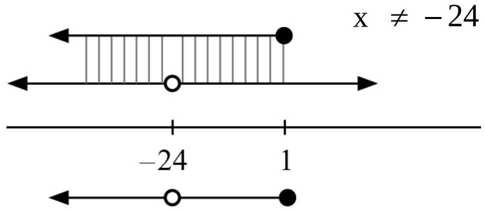
หา $D_{r_2^{-1}}$ พิจารณา $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}-5}$

$1-x \geq 0$ <u>และ</u> $\sqrt{1-x}-5 \neq 0$

$1 \geq x$ $\cap$ $\sqrt{1-x} \neq 5$

$1-x \neq 25$

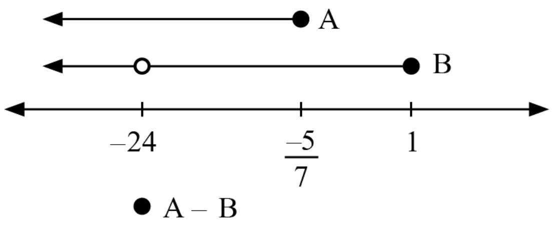
$x \neq -24$



$$D_{r_2^{-1}} = (-\infty, -24) \cup (-24, 1]$$

จาก $R_{r_2} = D_{r_2^{-1}}$

$\therefore\ B = R_{r_2} = D_{r_2^{-1}} = (-\infty, -24) \cup (-24, 1]$



$\therefore\ A - B = \{-24\}$

จะได้ว่า $A - B \subset (-28, 0]$

6. <u>ตอบ</u> 2

<u>วิธีทำ</u>

$$\arctan(\sin x) + \arctan(\cos x) + \arctan\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arctan(\sin x) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arctan(\sin x) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\sin x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

7. **ตอบ** 3

วิธีทำ

จาก $\log_2(7x^2+7) \ge \log_2(ax^2+4x+a)$

$7x^2+7 \ge ax^2+4x+a$

$\boxed{(7-a)x^2-4x+(7-a) \ge 0}$ เป็นพาราโบลาหงายแน่ๆ 

ซึ่งอสมการนี้จะเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x เมื่อ

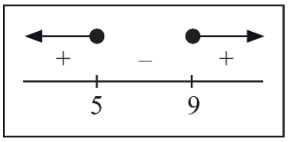
(I) $7-a > 0 \rightarrow \boxed{a<7}$ —— (1)

(II) จากอสมการ $Ax^2+Bx+C \ge 0$ เมื่อ $B^2-4AC \le 0$

ดังนั้น $(-4)^2-4(7-a)(7-a) \le 0$

$(a-7)^2-4 \ge 0 \rightarrow (a-7-2)(a-7+2) \ge 0$

$(a-9)(a-5) \ge 0$

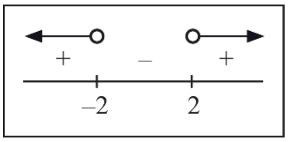


—— (2)

เงื่อนไขของ log : $ax^2+4x+a > 0$ ทุกค่า $x \in R$

จะได้ $4^2-4(a)(a) < 0$

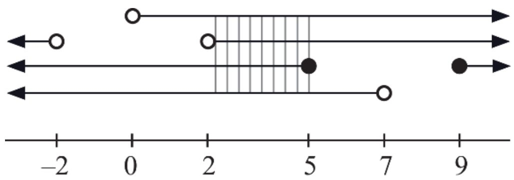
$a^2-4>0 \rightarrow (a-2)(a+2)>0$



—— (3)

จากโจทย์ $a \in I^+ \rightarrow \boxed{a>0}$ —— (4)

นำ (1) $\cap$ (2) $\cap$ (3) $\cap$ (4)



$\therefore$ $a \in (2, 5]$ และ $a \in I^+$

ดังนั้น $a = 3, 4, 5$

$\therefore$ $\Sigma a = 3+4+5 = 12$

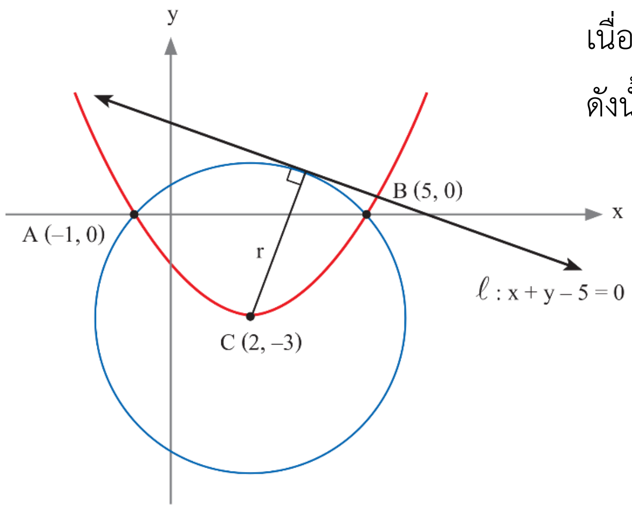
8. **ตอบ** 3

วิธีทำ

สมการวงกลม C : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$

ศูนย์กลางวงกลม คือ $\left(\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}\right) = C(2, -3)$

รัศมี $(r) = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - k} = \sqrt{13 - k}$



เนื่องจากวงกลม C สัมผัสกับเส้นตรง ℓ

ดังนั้น $d(C ; \ell) = r$

$$\frac{|2-3-5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{13-k}$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{13-k} \rightarrow 18 = 13 - k$$

$$\therefore \quad k = -5$$

จะได้ว่าสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$

จุดตัดแกน x แทน $y = 0$: $x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow (x-5)(x+1) = 0$

$x = -1, 5$ จะได้จุดตัดแกน x คือ $A(-1, 0)$ และ $B(5, 0)$

ดังนั้น พาราโบลา P ที่ผ่านจุด A และ B และมีจุดยอดที่จุด $C(2, -3)$ เป็นพาราโบลาหงายแน่ๆ

$P : (x-2)^2 = 4c(y+3)$

เนื่องจาก P ผ่านจุด $(5, 0)$: $(5-2)^2 = 4c(0+3)$

$4c = 3$

$\therefore$ ความยาวลาตัสเรกตัม $= |4c| = 3$

9. **ตอบ** 1

วิธีทำ

$\sin A+\sin B = \frac{1}{4} \rightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ——(1)

$\cos A+\cos B = \frac{1}{2} \rightarrow 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ——(2)

$\frac{(1)}{(2)}$ จะได้ $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\sin A+\sin B = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B = \frac{1}{16}$ ——(3)

$\cos A+\cos B = \frac{1}{2} \rightarrow \cos^2 A+2\cos A\cos B+\cos^2 B = \frac{1}{4}$ ——(4)

$(3)+(4)$ จะได้ $2+2\cos(A-B) = \frac{5}{16} \rightarrow \cos(A-B) = -\frac{27}{32}$

$$\therefore \sin 2A+\sin 2B = 2\sin(A+B)\cos(A-B) = 2\sin 2\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos(A-B)$$

$$= 2\left[\frac{2\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right)}\right]\cos(A-B)$$

$$= 2\left[\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]\left(-\frac{27}{32}\right) = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{27}{32}\right)$$

$$= -\frac{27}{20}$$

10. **<u>ตอบ</u>** 3

<u>วิธีทำ</u>

จาก $f'(x)$ มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0 \rightarrow \boxed{f''(0) = 0}$

จาก $f(x)$ มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1 \rightarrow \boxed{f'(-1) = 0}$

สมมุติ $f''(x) = Ax$ เมื่อ $A \in R$

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \frac{Ax^2}{2} + c$$

$$f'(-1) = 0 \rightarrow \frac{A}{2} + c = 0 \rightarrow \boxed{c = -\frac{A}{2}} \quad \text{——}(1)$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{Ax^3}{6} + cx + d$$

$$f(2) = 18 \rightarrow \frac{8A}{6} + 2c + d = 18 \quad \text{——}(2)$$

$$f(1) = -1 \rightarrow \frac{A}{6} + c + d = -1 \quad \text{——}(3)$$

$$(2)-(3),\ \frac{7A}{6} + c = 19$$

แทน $c = -\frac{A}{2}$ จะได้ $\frac{7A}{6} - \frac{A}{2} = 19 \rightarrow \frac{2A}{3} = 19 \rightarrow \boxed{A = \frac{57}{2}}$

แทน $A = \frac{57}{2}$ ใน (1) , $\boxed{c = -\frac{57}{4}}$

แทน A และ c ใน (3) , $\frac{57}{12} - \frac{57}{4} + d = -1 \rightarrow \boxed{d = \frac{34}{4}}$

ดังนั้น $f(x) = \frac{19}{4}x^3 - \frac{57}{4}x + \frac{34}{4}$

$f(0) = \frac{34}{4}$ $\therefore$ (ก) ผิด

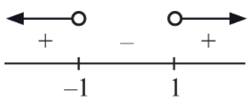
$$f'(x) = \frac{57}{4}x^2 - \frac{57}{4} = 0$$

$$\frac{57}{4}(x-1)(x+1) = 0 \quad \therefore\ x = \underbrace{-1}_{\text{Max}}, \underbrace{1}_{\text{Min}}$$

$\therefore$ f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ $\therefore$ (ค) ถูก

ให้ $f'(x) > 0 \rightarrow \frac{57}{4}x^2 - \frac{57}{4} > 0$

$$\frac{57}{4}(x-1)(x+1) > 0$$



$\therefore$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

และ $(2, 3\sqrt{5}] \subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ $\therefore$ (ข) ถูก

11. **ตอบ** 5

วิธีทำ

$B \subset A$ และ $n(B) = 11$

จะสร้าง B ได้ทั้งสิ้น $\binom{22}{11}$ แบบ โดยแต่ละแบบจะมีสมาชิก 11 ตัว

ดังนั้น จะมีจำนวนสมาชิกรวมทั้งหมด $= 11 \times \binom{22}{11}$ ตัว

ซึ่งจะเป็นเลข 1, 2, 3, ..., 22 ชนิดละเท่าๆ กัน คือ ชนิดละ $\dfrac{11\times\binom{22}{11}}{22} = \dfrac{\binom{22}{11}}{2}$ ตัว

$\therefore$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมด $= \dfrac{\binom{22}{11}}{2} \times (1+2+3+\ldots+22)$

$$= \frac{\binom{22}{11}}{2} \times \frac{22}{2}(1+22) = \frac{253}{2} \times \binom{22}{11}$$

$$= \frac{253}{2} \times \frac{22!}{11!11!} = \frac{253\times 11\times 21!}{11!11!}$$

$$= 253 \times \frac{21!}{11!10!} = 253\binom{21}{10}$$

12. **ตอบ** 2

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 2}\frac{(4^x)\sqrt{1+\sqrt{x+2}}-\sqrt{3}(4^x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4^x)\left[\sqrt{1+\sqrt{x+2}}-\sqrt{3}\right]}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}4^x\cdot\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x+2}}-\sqrt{3}}{x-2}}$$

แทนค่า $x = 2$ แล้วได้ $\frac{0}{0}$ ใช้ L'Hospital ต่อ

$$=(4^2)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x+2}}}\cdot\dfrac{d}{dx}(1+\sqrt{x+2})-0}{1}$$

$$=(16)\lim_{x\to 2}\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x+2}}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)$$

$$=(16)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

หมายเหตุ การหา $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x+2}}-\sqrt{3}}{x-2}$ อาจจะใช้วิธี Conjugate ก็ได้

จะได้ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x+2}}-\sqrt{3}}{x-2}\cdot\frac{(\sqrt{1+\sqrt{x+2}}+\sqrt{3})}{(\sqrt{1+\sqrt{x+2}}+\sqrt{3})}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(1+\sqrt{x+2})-3}{(x-2)(\sqrt{1+\sqrt{x+2}}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{(x-2)(\sqrt{1+\sqrt{x+2}}+\sqrt{3})}\cdot\frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{(x-2)(\sqrt{1+\sqrt{x+2}}+\sqrt{3})(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{1+\sqrt{x+2}}+\sqrt{3})(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{(2\sqrt{3})(4)}=\frac{1}{8\sqrt{3}}$$

13. **ตอบ** 2

วิธีทำ

พิจารณา (ก)

$$a^2+b^2+c^2 \le 2c-4a-6b-14$$

$$(a^2+4a+4)+(b^2+6b+9)+(c^2-2c+1) \le 0$$

$$(a+2)^2+(b+3)^2+(c-1)^2 \le 0$$

จาก $(a+2)^2+(b+3)^2+(c-1)^2 < 0$ เป็นไปไม่ได้

$$\therefore\ (a+2)^2+(b+3)^2+(c-1)^2 = 0$$

จะได้ว่า $a+2 = 0$, $b+3 = 0$ และ $c-1 = 0$

ดังนั้น $a = -2$, $b = -3$ และ $c = 1$

และได้ว่า $b < a < c$ จริง (ก) ถูก

พิจารณา (ข)

ผิด เช่น $a = 2$, $b = -2$, $c = -1$, $d = -3$

จะได้ $\frac{a}{d} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

และ $\frac{b}{c} = \frac{-2}{-1} = 2$

ดังนั้น $\frac{a}{d} \not> \frac{b}{c}$ เพราะ $-\frac{2}{3} \not> 2$

พิจารณา (ค)

เมื่อ $a, b > 0$

(1) $a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

เช่น $2 < 3 \rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

และ (2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \rightarrow a < b$

เช่น $\frac{1}{3} > \frac{1}{5} \rightarrow 3 < 5$

จากโจทย์

$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0 \rightarrow \frac{1}{b} > 0$ แสดงว่า $\mathbf{b > 0}$

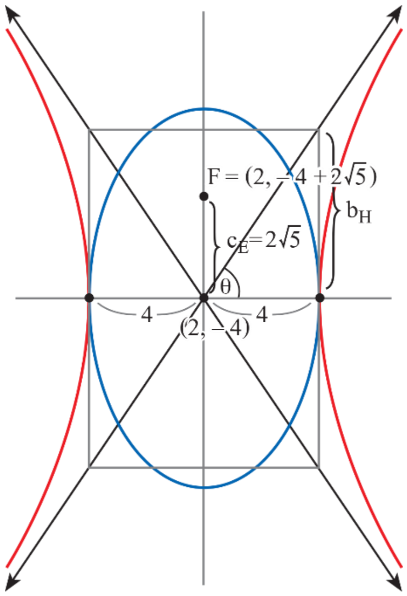
และ $\frac{1}{a} > 0$ แสดงว่า $\mathbf{a > 0}$

ดังนั้น $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ หมายถึง $a, b > 0$ และ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

จะได้ $a < b$ จริง (ค) ถูก

14. **ตอบ** 5

วิธีทำ



จากจุดศูนย์กลาง และจุดโฟกัสที่โจทย์กำหนดให้ พบว่าเป็นวงรีไข่ตั้งแน่ๆ และ $c_E = 2\sqrt{5}$

จากความเยื้องศูนย์กลาง (e) $= \dfrac{c_E}{a_E}$

จะได้ว่า $\dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{2\sqrt{5}}{a_E} \rightarrow a_E = 6$

$b_E = \sqrt{a_E^2 - c_E^2} = 4$

จากรูปไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดปลายแกนโท จะเป็นไฮเพอร์โบลาที่ลู่ x และจะได้ว่า $b_E = a_H = 4$ และจุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลาอยู่ที่จุด $(2, -4)$

จากโจทย์กำหนดให้ $\ell : 2x - y = 8$ เป็นเส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลา

จะได้ว่า $m_\ell = \tan\theta \rightarrow 2 = \dfrac{b_H}{4} \rightarrow b_H = 8$

ดังนั้น H : $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y+4)^2}{64} = 1$

$\times 64$ ตลอด H : $4(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 8y + 16) = 64$

$\therefore$ H : $4x^2 - y^2 - 16x - 8y - 64 = 0$

15. **<u>ตอบ</u>** 4

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{3}{\sin^2 20^\circ} - \frac{1}{\cos^2 20^\circ} + 64\sin^2 20^\circ = \frac{3}{\frac{1-\cos 40^\circ}{2}} - \frac{1}{\frac{1+\cos 40^\circ}{2}} + 32(2\sin^2 20^\circ)$$

$$= \frac{6}{1-\cos 40^\circ} - \frac{2}{1+\cos 40^\circ} + 32(1-\cos 40^\circ)$$

$$= \frac{6(1+\cos 40^\circ)-2(1-\cos 40^\circ)}{(1-\cos 40^\circ)(1+\cos 40^\circ)} + 32 - 32\cos 40^\circ$$

$$= 32 + \frac{4+8\cos 40^\circ}{1-\cos^2 40^\circ} - 32\cos 40^\circ$$

$$= 32 + \frac{4+8\cos 40^\circ - 32\cos 40^\circ(1-\cos^2 40^\circ)}{1-\cos^2 40^\circ}$$

$$= 32 + \frac{4+32\cos^3 40^\circ - 24\cos 40^\circ}{1-\cos^2 40^\circ}$$

$$= 32 + \frac{4+8(4\cos^3 40^\circ - 3\cos 40^\circ)}{1-\cos^2 40^\circ}$$

$$= 32 + \frac{4+8\cos 120^\circ}{1-\cos^2 40^\circ} = 32 + \frac{4+(-4)}{1-\cos^2 40^\circ}$$

$$= 32$$

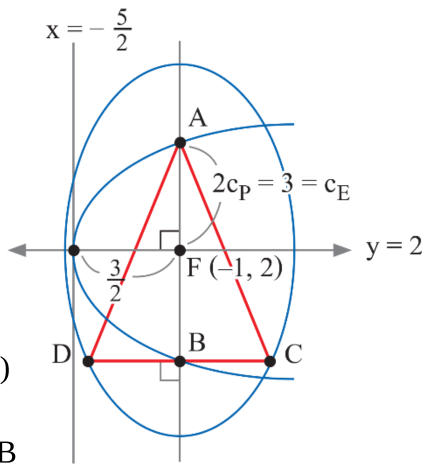
16. **ตอบ** 4

วิธีทำ

พาราโบลา P : $y^2-6x-4y-11 = 0$

$$y^2-4y+2^2 = 6x+11+2^2$$

$$(y-2)^2 = 6\left(x+\frac{5}{2}\right)$$



เป็นพาราโบลาเปิดขวา มีจุดยอด คือ $\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$

และ $4c_P = 6 \rightarrow c_P = \frac{3}{2}$ ดังนั้นจุดโฟกัสพารา คือ $(-1, 2)$

พิจารณาวงรี E จากกราฟ วงรีมีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด A และจุด B

ดังนั้นวงรีเป็นวงรีไข่ตั้งแน่ๆ (ตัดตัวเลือก 1 และ 3 ได้)

และจากจุด A และ B เป็นจุดปลายลาตัสเรกตัม และเป็นโฟกัสของวงรี E ด้วย

แสดงว่าจุดศูนย์กลางของวงรี คือ จุด $(-1, 2)$ (ตัดตัวเลือก 5 ได้)

และจะได้ว่า $c_E = 2c_P = 3$

จากความยาวรอบรูปของ $\Delta ACD = 20$ จะได้ว่า

$$\underbrace{AC+CB}_{2a_E} + \underbrace{DB+DA}_{2a_E} = 20$$

$$2a_E + 2a_E = 20 \quad \therefore\ a_E = 5$$

จากความสัมพันธ์ของ a_E, b_E และ c_E : $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2 \quad \therefore\ b_E^2 = 16$

สมการวงรี E : $\dfrac{(x+1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$

$\times 400$ ตลอด : $25(x^2+2x+1)+16(y^2-4y+4) = 400$

$$25x^2+50x+25+16y^2-64y+64 = 400$$

$$\therefore\ E : 25x^2+16y^2+50x-64y-311 = 0$$

17. **ตอบ** 1

วิธีทำ

จาก $B = A - 2I$

$$A^{-1}B = A^{-1}(A-2I) = I - 2A^{-1} \text{ —— } (1)$$

$$\det(\operatorname{adj}(I-2A^{-1})) = [\det(I-2A^{-1})]^{3-1}$$

$$= [\det(A^{-1}B)]^2$$

$$= [\det A^{-1} \cdot \det B]^2 = \left(\frac{\det B}{\det A}\right)^2 \text{ —— } (2)$$

จาก $B = A - 2I$

$$B^3 = (A-2I)^3 = A^3 - 6A^2 + 12A - 8I$$

$$B^3 = (A^3 - 6A^2 + 7A - 8I) + 5A$$

$$B^3 = 5A \rightarrow \det B^3 = \det(5A) = 5^3 \det A = 5^3(8) = 5^3 \times 2^3$$

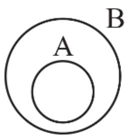
$$\therefore \det B = (5)(2) = 10$$

แทนใน (2) , $\therefore \det(\operatorname{adj}(I-2A^{-1})) = \left(\frac{10}{8}\right)^2 = \frac{25}{16}$

18. **ตอบ** 2

วิธีทำ

ข้อความ (ก) : $A \subset B$ ดังนั้น $A \cap B = A$

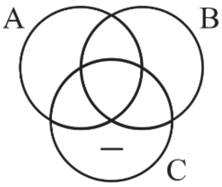


เนื่องจาก $C = \{A, B\}$

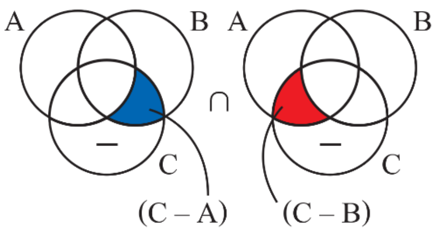
$\therefore$ $\underline{A \cap B} \in C$ แน่ๆ ข้อความ (ก) ถูกต้อง

$= A$

ข้อความ (ข) : $C \subset A \cup B$ จะสามารถวาดแผนภาพได้ดังรูป

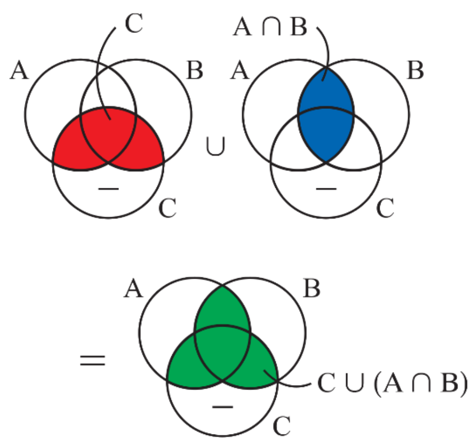


พิจารณา $(C-A) \cap (C-B)$



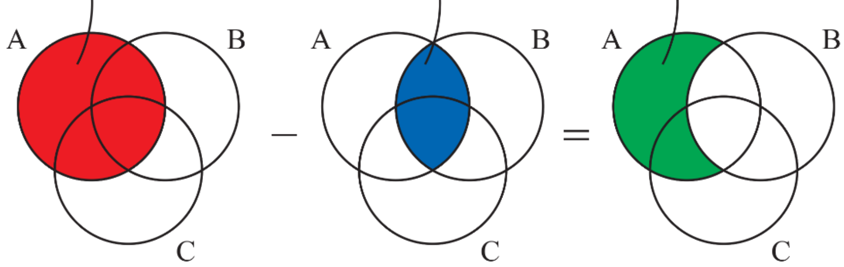
พบว่า $(C-A) \cap (C-B) = \varnothing$

พิจารณา $C \cup (A \cap B)$



$\therefore$ $(C-A) \cap (C-B) \neq C \cup (A \cap B)$ ข้อความ (ข) ผิด

ข้อความ (ค) : $[A \cup (A \cap B \cap C)] \quad - \quad (A \cap B) \qquad A - B$



$\therefore$ $[A \cup (A \cap B \cap C)] - (A \cap B) = A - B$ ข้อความ (ค) ถูกต้อง

19. **ตอบ** 4

วิธีทำ

จาก $\bar{a}\times(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}) = -\bar{b}\times(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k})$

$$\bar{a}\times(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k})+\bar{b}\times(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}) = \bar{0}$$

$$(\bar{a}+\bar{b})\times(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}) = \bar{0}$$

แสดงว่า $(\bar{a}+\bar{b}) \,//\, 2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}$

เราสามารถอ้างได้ว่า

$$\bar{a}+\bar{b} = m(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k})\ ,\ m\in R-\{0\}$$

$$|\bar{a}+\bar{b}| = |m(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k})|$$

$$\sqrt{29} = |m|\cdot|2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}|$$

$$\sqrt{29} = |m|\cdot\sqrt{2^2+3^2+4^2}$$

$$\sqrt{29} = |m|\cdot\sqrt{29} \rightarrow |m| = 1 \rightarrow m = 1, -1$$

$$\therefore\quad \bar{a}+\bar{b} = \pm(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k})$$

$$|(\bar{a}+\bar{b})\cdot(-7\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})| = |\pm(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k})\cdot(-7\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})|$$

$$= |(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k})\cdot(-7\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})|$$

$$= |2\cdot(-7)+3\cdot 2+4\cdot 3| = 4$$

20. **ตอบ** 4

วิธีทำ

$$(1+\sqrt{3}i)^{2563} = \left[2\text{cis}\frac{\pi}{3}\right]^{2563} = 2^{2563}\text{cis}2563\frac{\pi}{3}$$

$$= 2^{2563}\text{cis}\left(854\pi+\frac{\pi}{3}\right) = 2^{2563}\text{cis}\frac{\pi}{3}$$

$$= 2^{2563}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{2563}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{2^{2564}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{2564}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)$$

จะได้ว่า $a = \frac{1}{4}$ และ $b = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\therefore\quad \sqrt{a}+b^2 = \sqrt{\frac{1}{4}}+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

21. **ตอบ** 3

วิธีทำ

จากโจทย์ $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_n$ นำ $a_{n+1}a_n$ หารทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

แสดงว่า $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \ldots\ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n}$ เป็นลำดับเลขคณิต มี $d = 1$

มีพจน์ทั่วไปเป็น $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ และมีพจน์ที่หนึ่งเป็น $\frac{a_2}{a_1}$

ดังนั้น

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} + (n-1)d$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2009 + (n-1)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2008 + n$$

$$\therefore \frac{a_{993}}{1000a_{991}} = \frac{1}{1000}\left(\frac{a_{993}}{a_{992}}\right)\left(\frac{a_{992}}{a_{991}}\right) = \frac{1}{1000}(2008+992)(2008+991)$$

$$= 8997$$

22. **<u>ตอบ</u>** 4

<u>วิธีทำ</u>

จาก $f'(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1 \rightarrow \boxed{f''(1) = 0}$

จาก $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1 \rightarrow \boxed{f'(-1) = 0}$

สมมุติ $f''(x) = A(x-1) = Ax - A$ เมื่อ $A \in R$

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \frac{Ax^2}{2} - Ax + c$$

$$f'(-1) = 0 \rightarrow \frac{A}{2} + A + c = 0 \rightarrow \frac{3A}{2} + c = 0 \rightarrow \boxed{c = -\frac{3A}{2}} \quad \text{——(1)}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{Ax^3}{6} - \frac{Ax^2}{2} + cx + d$$

$$f(1) = -6 \rightarrow \frac{A}{6} - \frac{A}{2} + c + d = -6 \quad \text{——(2)}$$

$$f(-1) = 10 \rightarrow -\frac{A}{6} - \frac{A}{2} - c + d = 10 \quad \text{——(3)}$$

$$(2)-(3)\ ,\ \frac{A}{3} + 2c = -16 \rightarrow A + 6c = -48 \quad \text{——(4)}$$

แทน $c = -\frac{3A}{2}$ ใน (4), $A + 6\left(-\frac{3A}{2}\right) = -48 \rightarrow \boxed{A = 6}$

แทน $A = 6$ ใน (1), $\boxed{c = -9}$

แทน $A = 6, c = -9$ ใน (3), $\boxed{d = 5}$

จะได้

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0 \qquad \therefore\ x = \underbrace{-1}_{\text{Max}}\ ,\ \underbrace{3}_{\text{Min}}$$

$f(-1) = -1-3+9+5 = 10 \rightarrow$ จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(-1, 10)$

$f(3) = 27-27-27+5 = -22 \rightarrow$ จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(3, -22)$

$\therefore$ ระยะระหว่าง $(-1, 10)$ กับ $(3, -22)$ $= \sqrt{(-1-3)^2 + (10+22)^2}$

$$= \sqrt{4^2 + 32^2} = \sqrt{2^4 + 2^{10}}$$

$$= \sqrt{2^4(1+2^6)} = 4\sqrt{65}$$

23. **ตอบ** 1

วิธีทำ

จากโจทย์ $|\bar{a}-\bar{b}|^2+|\bar{b}-\bar{c}|^2+|\bar{c}-\bar{a}|^2 = 9$

$$|\bar{a}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}+|\bar{b}|^2+|\bar{b}|^2-2\bar{b}\cdot\bar{c}+|\bar{c}|^2+|\bar{c}|^2-2\bar{c}\cdot\bar{a}+|\bar{a}|^2 = 9$$

$$1^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}+1^2+1^2-2\bar{b}\cdot\bar{c}+1^2+1^2-2\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}+1^2 = 9$$

$$-2\bar{a}\cdot\bar{b}-2\bar{b}\cdot\bar{c}-2\bar{c}\cdot\bar{a} = 3$$

$$2\bar{a}\cdot\bar{b}+2\bar{b}\cdot\bar{c}+2\bar{c}\cdot\bar{a} = -3 \quad \text{——}(1)$$

$$|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2 = 1^2+1^2+1^2 = 3 \quad \text{——}(2)$$

$(1)+(2)$, $\quad |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+2\bar{b}\cdot\bar{c}+2\bar{c}\cdot\bar{a} = 0$

$$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2 = 0$$

$$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| = 0$$

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \bar{0}$$

$$\therefore \quad \bar{b}+\bar{c} = -\bar{a}$$

$$|4\bar{a}+5\bar{b}+5\bar{c}| = |4\bar{a}+5(\bar{b}+\bar{c})|$$

$$= |4\bar{a}+5(-\bar{a})|$$

$$= |4\bar{a}-5\bar{a}| = |-\bar{a}| = |\bar{a}| = 1$$

24. **ตอบ** 3

วิธีทำ

$N = 70+a+70+b+10 = 150+a+b$

เราพบว่า ค่าของมัธยฐาน $= 20.5$ ตรงกับขอบเขตบนของชั้น $11-20$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\text{ตำแหน่งของ Med} &= \text{ความถี่สะสมของชั้น } 11-20 \\
\frac{N}{2} &= 70+a \\
\frac{150+a+b}{2} &= 70+a \\
150+a+b &= 140+2a \\
150-140 &= 2a-a-b \\
10 &= a-b \\
\therefore\ a-b &= 10
\end{aligned}
$$

25. **ตอบ** 3

วิธีทำ

จาก $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$ มีค่าน้อยสุด

ดังนั้น จากโจทย์

$\sum_{i=1}^{20}(x_i-a)^2$ มีค่าน้อยสุด เมื่อ $a = 7$

$\therefore\ \mu = 7$

และได้ว่า $\sum_{i=1}^{20} x_i = N\cdot\mu = 20\times 7 = 140$

จาก

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{20}(x_i-5)^2 &= 380 \\
\sum_{i=1}^{20}(x_i^2-10x+25) &= 380 \\
\sum_{i=1}^{20}x_i^2-\sum_{i=1}^{20}10x_i+\sum_{i=1}^{20}25 &= 380 \\
\sum_{i=1}^{20}x_i^2-10\sum_{i=1}^{20}x_i+20\cdot 25 &= 380 \\
\sum_{i=1}^{20}x_i^2-10\cdot 140+500 &= 380 \\
\therefore\ \sum_{i=1}^{20}x_i^2 &= 1280
\end{aligned}
$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \mu^2$$

$$= \frac{1280}{20} - 7^2$$

$$= 15$$

จากโจทย์ $y_i = \frac{3(x_i - 4)}{2}$

$$y_i = \frac{3}{2}x_i - 6$$

จาก $y_i = cx_i + d$

จะได้ $\sigma_y^2 = c^2\sigma_x^2$

$$\therefore \quad \sigma_y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 15$$

$$= \frac{9}{4} \cdot 15$$

$$= 33.75$$

26. <u>**ตอบ**</u> 5

<u>**วิธีทำ**</u>

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & , \quad x < -1 \\ 2x & , \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2 + ax + b & , \quad x > 1 \end{cases}$$

f ต่อเนื่องที่ x = –1

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^-} (x^2 + ax + b)$$

$$2(-1) = 1 - a + b \rightarrow a - b = 3 \text{ ——(1)}$$

f ต่อเนื่องที่ x = 1

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + ax + b)$$

$$2(1) = 1 + a + b \rightarrow a + b = 1 \text{ ——(2)}$$

แก้สมการ (1) และ (2) จะได้ $a = 2, b = -1$ $\therefore$ $|a + 2b| = 0$ ดังนั้น (ก) ผิด

จะได้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & , \quad x < -1 \\ 2x & , \quad -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$

พิจารณา x = –1 : $x \rightarrow -1^-$, $f'(x) = 2x + 2 \rightarrow f'(-1^-) = -2 + 2 = 0$

$x \rightarrow -1^+$, $f'(x) = 2 \rightarrow f'(-1^+) = 2$

พบว่า $f'(-1^-) \ne f'(-1^+)$ $\therefore$ f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $x = -1$

พิจารณา x = 1 : $x \rightarrow 1^-$, $f'(x) = 2 \rightarrow f'(1^-) = 2$

$x \rightarrow 1^+$, $f'(x) = 2x + 2 \rightarrow f'(1^+) = 2 + 2 = 4$

พบว่า $f'(1^-) \ne f'(1^+)$ $\therefore$ f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ $x = 1$

27. **ตอบ** 4

วิธีทำ

จากโจทย์ $2f(x^2)+3f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x^2-1$ ——(1)

แทน x ด้วย $\frac{1}{x}$ ลงในสมการ (1)

$$2f\left(\frac{1}{x^2}\right)+3f(x^2) = \frac{1}{x^2}-1 \quad \text{——(2)}$$

$3\times(2)-2\times(1)$, $9f(x^2)-4f(x^2) = 3\left(\frac{1}{x^2}-1\right)-2(x^2-1)$

$$5f(x^2) = 3\frac{(1-x^2)}{x^2}+2(1-x^2)$$

$$= (1-x^2)\left(\frac{3}{x^2}+2\right)$$

$$= (1-x^2)\left(\frac{3+2x^2}{x^2}\right)$$

$$\therefore \quad f(x^2) = (1-x^2)\left(\frac{3+2x^2}{5x^2}\right)$$

แทน x^2 ด้วย x^2+1

จะได้ $f(x^2+1) = (1-(x^2+1))\left(\frac{3+2(x^2+1)}{5(x^2+1)}\right)$

$$= (-x^2)\left(\frac{2x^2+5}{5x^2+5}\right) = \frac{(-x^2)(2x^2+5)}{5x^2+5}$$

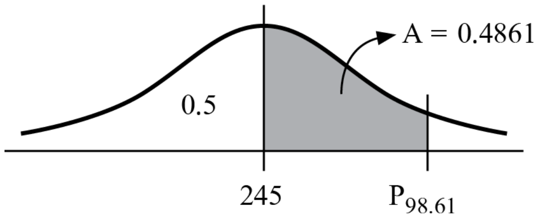
28. **<u>ตอบ</u>** 2

<u>วิธีทำ</u>

ในปี 2561 $\mu = 245$, $\sigma^2 = 625 \rightarrow \sigma = 25$

ในปี 2562 $\mu = 324$, $\sigma^2 = 400 \rightarrow \sigma = 20$

พิจารณา $P_{98.61}$ ในปี 2561



ดังนั้น $P_{98.61}$ ในปี 2561 คือ $z = 2.2$

จาก $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$2.2 = \frac{x-245}{25}$$

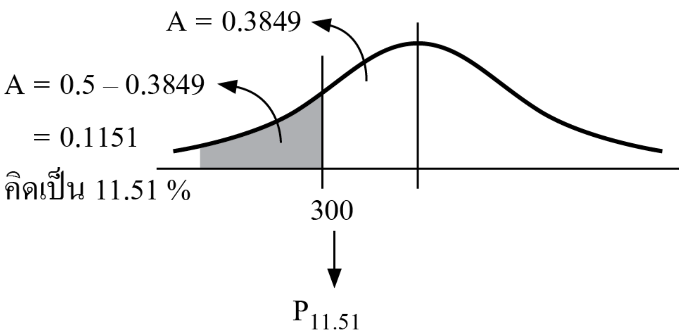
$$x = 300$$

พิจารณา $x = 300$ ในปี 2562

จาก $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$= \frac{300-324}{20}$$

$$= -1.2 \quad (\text{เมื่อ } z = 1.2 \rightarrow A = 0.3849)$$

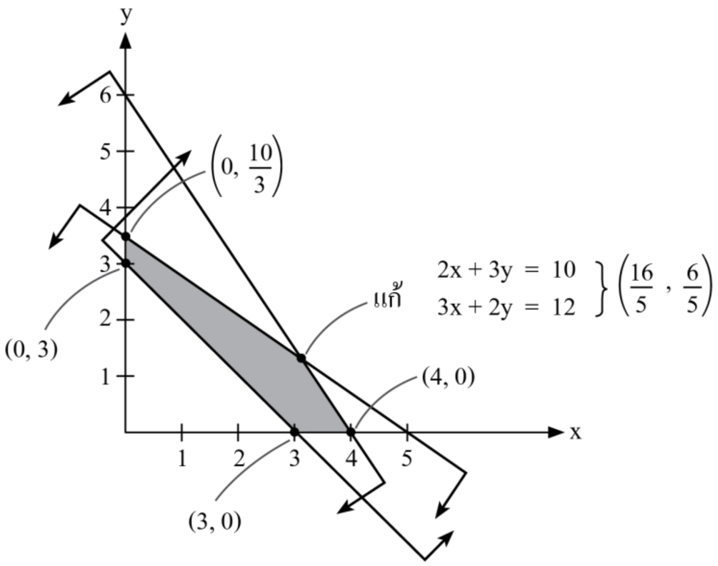


ดังนั้น $P_{98.61}$ ในปี 2561 จะตรงกับ $P_{11.51}$ ในปี 2562

29. **ตอบ** 4

วิธีทำ

เมื่อเราวาดกราฟตามอสมการข้อจำกัดจะได้



$$P(3, 0) = a(3)+3a(0) = 3a \quad \text{MIN}$$

$$P(4, 0) = a(4)+3a(0) = 4a$$

$$P\left(\frac{16}{5}, \frac{6}{5}\right) = a\left(\frac{16}{5}\right)+3a\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{34}{5}a$$

$$P\left(0, \frac{10}{3}\right) = a(0)+3a\left(\frac{10}{3}\right) = 10a \quad \text{MAX}$$

$$P(0, 3) = a(0)+3a(3) = 9a$$

เมื่อ $a > 0$ เราพบว่า $P_{MAX} = 10a$

$$\therefore \quad 10a = 30$$

$$\therefore \quad a = 3$$

และ $P_{MIN} = 3a = 3 \cdot 3 = 9$

30. **ตอบ** 2

วิธีทำ

สมการคือ $x = my + c$ ——(1)

เมื่อ $y = 2$ ประมาณได้ $x = 4$

ดังนั้น $4 = m(2) + c$

$2m + c = 4$ ——(2)

$(1) \times y$, $xy = my^2 + cy$

$\Sigma xy = m\Sigma y^2 + c\Sigma y$ ——(3)

จากตารางได้ $\Sigma y = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$\Sigma y^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

จากโจทย์ $\Sigma xy = 35$

จาก (3), $35 = m(30) + c(10)$

$30m + 10c = 35$ ——(4)

แก้ (2), (4) ได้ $m = -\frac{1}{2}$ และ $c = 5$

จาก (1) ได้ $x = -\frac{1}{2}y + 5$

เมื่อ $y = 4 \rightarrow x = -\frac{1}{2}(4) + 5$

$= 3$

31. **<u>ตอบ</u>** 5

<u>วิธีทำ</u>

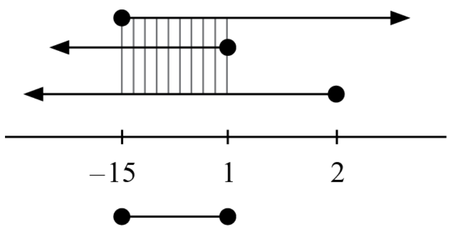
พิจารณาเงื่อนไข

$1-x \geq 0$ <u>และ</u> $2-x \geq 0$ <u>และ</u> $4-\sqrt{1-x} \geq 0$

$1 \geq x$ $\cap$ $2 \geq x$ $\cap$ $4 \geq \sqrt{1-x}$

$16 \geq 1-x$

$x \geq -15$



จากโจทย์ $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x}$

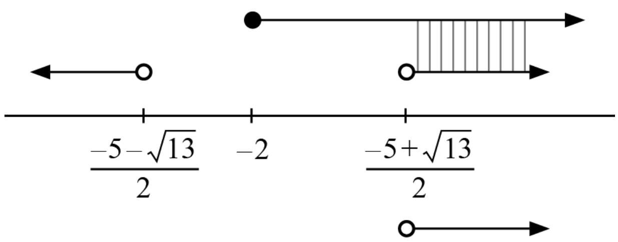
ยกกำลัง 2 $(\sqrt{4-\sqrt{1-x}})^2 > (\sqrt{2-x})^2$

$$4-\sqrt{1-x} > 2-x$$

$$x+2 > \sqrt{1-x}$$

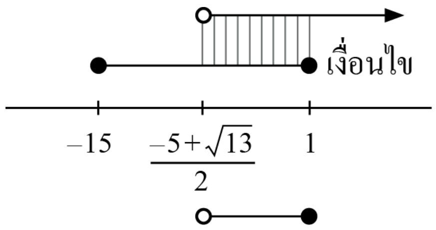
แบ่ง 2 กรณี

ในกรณีนี้ $x \geq -2$ ดังนั้น



พิจารณาทั้ง 2 กรณี จะได้ $x \in \left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$ เพราะกรณีที่ 1 ไม่มีคำตอบ

แต่ข้อนี้มีเงื่อนไขว่า $x \in [-15, 1]$ ดังนั้น



พบว่า
$$\frac{-5+\sqrt{9}}{2} < \frac{-5+\sqrt{13}}{2} < \frac{-5+\sqrt{16}}{2}$$
$$\frac{-5+3}{2} < \frac{-5+\sqrt{13}}{2} < \frac{-5+4}{2}$$
$$-1 < \frac{-5+\sqrt{13}}{2} < \frac{-1}{2}$$

แสดงว่า เมื่อ $A = \left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, 1\right]$ จะได้ $a = 0$, $b = 1$ ดังนั้น $2a+3b = 3$

32. **<u>ตอบ</u>** 2

<u>วิธีทำ</u>

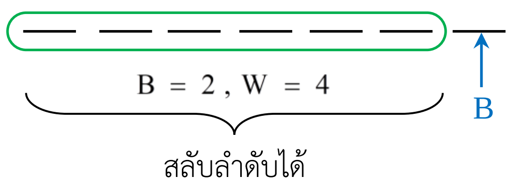
มองลำดับการหยิบลูกบอลทั้ง 13 ลูก เหมือนการเรียงแนวตรง

ให้ W แทน ลูกบอลสีขาว , B แทนลูกบอลสีดำ

หา n(s) : มองเหมือนการนำ W 10 ตัว และ B 3 ตัว มาเรียง

$$n(s) = \frac{13!}{10!3!}$$

หา n(E) : หยิบ 7 ครั้ง และครั้งที่ 7 ต้องเป็นสีดำ (B) ลูกที่ 3



จะได้ $n(E) = \frac{6!}{2!4!}$

$$\therefore\ P(E) = \frac{\frac{6!}{2!4!}}{\frac{13!}{10!3!}} = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{10!3!}{13!} = \frac{15}{286}$$

33. **ตอบ** 4

วิธีทำ

จากโจทย์ $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

แทน $n = 1$, $a_3 = a_2 - a_1$

แทน $n = 2$, $a_4 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 - a_2 = -a_1$

แทน $n = 3$, $a_5 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 - a_3 = -a_2$

แทน $n = 4$, $a_6 = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 - a_4 = -a_3$

แทน $n = 5$, $a_7 = a_6 - a_5 = a_5 - a_4 - a_5 = -a_4 = -(-a_1) = a_1$

แทน $n = 6$, $a_8 = a_7 - a_6 = a_6 - a_5 - a_6 = -a_5 = -(-a_2) = a_2$

แสดงว่าลำดับชุดนี้มีการซ้ำกันเป็นชุด ชุดละ 6 ตัว โดยเริ่มจาก a_1

และจากการสังเกตพบว่า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$

$\therefore\ a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2019}$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12})$

$+ ..... + (a_{2011} + a_{2012} + a_{2013} + a_{2014} + a_{2015} + a_{2016}) + a_{2017} + a_{2018} + a_{2019}$

$= 0 + 0 + 0 + ... + 0 + a_{2017} + a_{2018} + a_{2019}$

$= a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_2 - a_1 = 2a_2$

$= 2(1001) = 2002$

34. **ตอบ** 1

วิธีทำ

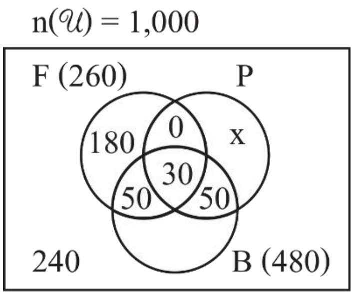
จากกฎของ cosine

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos 60^\circ \rightarrow b^2+c^2-a^2 = bc$$

$$\begin{aligned}\therefore \left(1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\right) &= \left(\frac{c+a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c-a}{b}\right) \\ &= \left(\frac{b+c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c-a}{b}\right) \\ &= \frac{(b+c)^2-a^2}{bc} \\ &= \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{bc} \\ &= \frac{(b^2+c^2-a^2)+2bc}{bc} \\ &= \frac{bc+2bc}{bc} = \frac{3bc}{bc} = 3\end{aligned}$$

35. **ตอบ** 3

วิธีทำ



ให้ F คือ เซตของนักเรียนที่เล่นฟุตบอล

P คือ เซตของนักเรียนที่เล่นปิงปอง

B คือ เซตของนักเรียนที่เล่นแบดมินตัน

จากโจทย์ $n(F) = 260$

23% ของนักเรียนทั้งหมด $= \frac{23}{100} \times 1000 = 230$ คน

เล่นฟุตบอลแต่ไม่เล่นปิงปอง

ดังนั้น $n(F-P) = 230$

8% ของนักเรียนทั้งหมด $= \frac{8}{100} \times 1000 = 80$ คน เล่นฟุตบอลและแบดมินตัน

ดังนั้น $n(F \cap B) = 80$

48% ของนักเรียนทั้งหมด $= \frac{48}{100} \times 1000 = 480$ คน เล่นกีฬาแบดมินตัน

ดังนั้น $n(B) = 480$

24% ของนักเรียนทั้งหมด $= \frac{24}{100} \times 1000 = 240$ คน ที่ไม่เล่นกีฬาชนิดใดเลย

จะสามารถเติมแผนภาพใดดังรูป

เนื่องจาก $n(F) = 260$ แสดงว่า $n((F \cap P)-B) = 0$ แน่ๆ

ให้ นักเรียนที่เล่นปิงปองเพียงประเภทเดียว มี x คน

จากแผนภาพจะได้ว่า

$$\begin{aligned} x+180+n(B)+240 &= 1000 \\ x+420+480 &= 1000 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

$\therefore$ นักเรียนที่เล่นกีฬาปิงปองเพียงประเภทเดียวเท่านั้น มีทั้งหมด 100 คน

<u>ตอนที่ 2</u> : แบบอัตนัย เติมคำตอบที่ถูกต้อง

จำนวน 10 ข้อ (ข้อ 36 - 45) ข้อละ 9 คะแนน

36. **<u>ตอบ</u>** 0

<u>วิธีทำ</u>

จากโจทย์ ได้ว่า $\text{fof}(x) = f(f(x))$

$= f(|x|-2)$

$= ||x|-2|-2$

และจะได้ว่า $g(x) = (\text{fo}(\text{fof}))(x)$

$= f(\text{fof}(x))$

$= f(||x|-2|-2)$

$= |||x|-2|-2|-2$

พิจารณาค่าต่ำสุดของ $g(x)$ พบว่า

จาก $g(x) = |||x|-2|-2|-2$

$g(x)$ จะต่ำสุดเมื่อ $|||x|-2|-2| = 0$

$||x|-2| = 2$

$|x| = 4, 0$

$x = 4, -4, 0$

แสดงว่า $g(a) \le g(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x เมื่อ $a = 4, -4, 0$

ดังนั้นผลบวกของจำนวนจริง a ทั้งหมด คือ $4+(-4)+0$ เท่ากับ 0

37. **ตอบ** 60

วิธีทำ

ให้ $A = \log_{225}(x)$, $B = \log_{64}(y)$

จะได้ $A+B = 4$ ——(1) $\rightarrow \boxed{B = 4-A}$

$\frac{1}{A}-\frac{1}{B} = 1$ ——(2)

แทน $B = 4-A$ ใน (2) , $\frac{1}{A}-\frac{1}{4-A} = 1$

$$\frac{4-A-A}{A(4-A)} = 1$$

$$4-2A = 4A-A^2$$

$$A^2-6A+4 = 0$$

$$A = \frac{6\pm\sqrt{36-4(4)}}{2} = 3\pm\sqrt{5}$$

แทน A ใน (1) , ถ้า $A = 3+\sqrt{5}$, $B = 1-\sqrt{5}$

ถ้า $A = 3-\sqrt{5}$, $B = 1+\sqrt{5}$

กรณี 1 $A = 3+\sqrt{5} \rightarrow \log_{225}(x) = 3+\sqrt{5} \rightarrow x = 225^{3+\sqrt{5}}$

$B = 1-\sqrt{5} \rightarrow \log_{64}(y) = 1-\sqrt{5} \rightarrow y = 64^{1-\sqrt{5}}$

$\therefore (a, b) = (225^{3+\sqrt{5}}, 64^{1-\sqrt{5}})$

กรณี 2 $A = 3-\sqrt{5} \rightarrow \log_{225}(x) = 3-\sqrt{5} \rightarrow x = 225^{3-\sqrt{5}}$

$B = 1+\sqrt{5} \rightarrow \log_{64}(y) = 1+\sqrt{5} \rightarrow y = 64^{1+\sqrt{5}}$

$\therefore (c, d) = (225^{3-\sqrt{5}}, 64^{1+\sqrt{5}})$

ดังนั้น $5\log_{30}(abcd) = 5\log_{30}(225^{3+\sqrt{5}}\cdot 64^{1-\sqrt{5}}\cdot 225^{3-\sqrt{5}}\cdot 64^{1+\sqrt{5}})$

$$= 5\log_{30}(225^6\cdot 64^2)$$

$$= 5\log_{30}((15^2)^6\cdot(2^6)^2)$$

$$= 5\log_{30}(15^{12}\times 2^{12})$$

$$= 5\log_{30}(30^{12}) = 60$$

38. **ตอบ** 30.5

วิธีทำ

จากโจทย์ ได้ว่า $f(x) = 2x^3 - 1$ และ $g^{-1}(x) = 2x - 29$

จาก $(f^{-1}og)(a) = 2$

$$f^{-1}(g(a)) = 2$$

$$g(a) = f(2) \qquad f(2) = 2(2)^3 - 1 = 15$$

$$a = g^{-1}(f(2))$$

$$= g^{-1}(15)$$

$$= 2(15) - 29$$

$$= 1$$

$\therefore \ (f+g)(2a) = (f+g)(2) = f(2) + g(2)$

$$= 15 + 15.5$$

$$= 30.5$$

* **หา g(2)**

$$2 = 2x - 29$$

$$31 = 2x \rightarrow x = 15.5$$

$\therefore \ g(2) = 15.5$

39. **<u>ตอบ</u>** 8

<u>วิธีทำ</u>

$$2\log_2 \log_2 x + \log_{2^{-1}} \log_2(2\sqrt{2}x) = 1$$

$$\log_2(\log_2 x)^2 - \log_2 \log_2(2\sqrt{2}x) = 1$$

$$\log_2\left[\frac{(\log_2 x)^2}{\log_2(2\sqrt{2}x)}\right] = 1$$

$$\frac{(\log_2 x)^2}{\log_2 2\sqrt{2} + \log_2 x} = 2^1$$

$$(\log_2 x)^2 = 2(\log_2 2^{\frac{3}{2}} + \log_2 x)$$

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0$$

$$(\log_2 x - 3)(\log_2 x + 1) = 0$$

$$\log_2 x = 3, -1$$

$$x = 2^3, 2^{-1} \rightarrow x = 8, \frac{1}{2}$$

ตรวจคำตอบแล้ว $x = \frac{1}{2}$ ใช้ไม่ได้

ดังนั้น $A = \{8\}$

$\therefore$ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดใน A คือ 8

40. **ตอบ** 0027.00

วิธีทำ

$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 26x^2 + bx - 216 = 0$ มีคำตอบเป็น a_1, a_2, a_3

จากความรู้เรื่องสมการพหุนาม จะได้ว่า $a_1a_2a_3 = -(-216)$

แต่ a_1, a_2, a_3 เป็น G.S $\rightarrow a_2^2 = a_1a_3$

ดังนั้น $a_1a_2a_3 = 216 \rightarrow a_1a_3a_2 = 216 \rightarrow a_2^3 = 216 \rightarrow a_2 = 6$

แทนค่า $a_2 = 6$ ลงใน $f(x) = 0$ จะได้ว่า $6^3 - 26(6)^2 + b(6) - 216 = 0 \rightarrow b = 156$

ดังนั้นสมการคือ $x^3 - 26x^2 + 156x - 216 = 0$

หาคำตอบที่เหลือโดยการหารสังเคราะห์

$$
\begin{array}{r|rrrr}
6 & 1 & -26 & 156 & -216 \\
  & 0 & 6 & -120 & 216 \\
\hline
  & 1 & -20 & 36 & 0
\end{array}
$$

$$x^2 - 20x + 36$$

จาก $x^3 - 26x^2 + 156x - 216 = 0 \rightarrow (x-6)(x^2 - 20x + 36) = 0$

$(x-18)(x-6)(x-2) = 0 \rightarrow x = 18, 6, 2 \rightarrow a_1, a_2, a_3$ คือ 18, 6, 2

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... = 18+6+2+.....$$

$$= \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

41. **<u>ตอบ</u>** 419

<u>วิธีทำ</u>

เมื่อ พิสัย $= 18 \rightarrow z-1 = 18 \rightarrow z = 19$

จาก $\sigma^2 = 40 \rightarrow \sigma = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

และจาก สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \dfrac{\sigma}{\mu}$

ดังนั้น $\dfrac{2\sqrt{10}}{7} = \dfrac{2\sqrt{10}}{\mu}$

$\therefore \mu = 7$

จาก $\mu = \dfrac{\Sigma x}{N}$

$$7 = \frac{1+x+5+y+19}{5}$$

$$x+y = 10 \quad \text{——}(1)$$

จาก $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma x^2}{N} - \mu^2$

$$40 = \frac{1^2+x^2+5^2+y^2+19^2}{5} - 7^2$$

$$40 = \frac{x^2+y^2+387}{5} - 49$$

$$x^2+y^2 = 58 \quad \text{——}(2)$$

$(1)^2$, $(x+y)^2 = 10^2$

$$x^2+2xy+y^2 = 100 \quad \text{——}(3)$$

$(3)-(2)$, $2xy = 42$

$$xy = 21 \quad \text{——}(4)$$

พิจารณา (1), (4) จะได้ว่า $x = 3$, $y = 7$

$\therefore \; x^2+y^2+z^2 = 3^2+7^2+19^2 = 419$

42. **ตอบ** 1

วิธีทำ

จาก $f(x) = 1+xg(x) \rightarrow f(0) = 1+0.g(0) \rightarrow \boxed{f(0) = 1}$

จาก $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(f(h)-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x)\frac{[1+hg(h)-1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x)\left(\frac{hg(h)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0} g(h) = f(x) \cdot (1)$$

ดังนั้น $f'(x) = f(x)$

และ $f''(x) = f'(x) = f(x)$

และ $f'''(x) = f(x) \quad \therefore \; f'''(0) = f(0) = 1$

43. **ตอบ** 0.4

วิธีทำ

$g(256) = f^{-1}(256)$

หา $f^{-1}(256)$

$$256 = \begin{cases} \cancel{x, x < 1} \\ \cancel{x^2, 1 \le x \le 4} \\ 8\sqrt{x}, x > 4 \end{cases}$$

พบว่า $256 = 8\sqrt{x}$ โดย $x > 4$ เท่านั้น

$$32 = \sqrt{x}$$

$$x = 1024$$

ดังนั้น $f^{-1}(256) = 1024 \rightarrow g(256) = 1024$

$$h\left(\frac{1}{512}g(256)\right) = h\left(\frac{1}{512} \cdot 1024\right) = h(2)$$

หา h(2)

$$2 = \frac{x}{3x-1} \rightarrow 6x-2 = x$$

$$5x = 2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \ h(2) = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น $h\left(\frac{1}{512}g(256)\right) = \frac{2}{5} = 0.4$

44. **ตอบ** 92.31

วิธีทำ

ให้ N แทนจำนวนเสื้อในร้านทั้งหมด

จากโจทย์ได้ว่า

$$\frac{70}{100}N-n = m+n \quad \text{——}(1)$$

$$\frac{30}{100}N-m = m-n \quad \text{——}(2)$$

จาก (1) $\quad m+2n = 0.7N \quad \text{——}(3)$

จาก (2) $\quad 2m-n = 0.3N \quad \text{——}(4)$

$$2\times(3)-(4)\ , \quad 5n = 1.1N$$

$$n = 0.22N$$

แทน n ใน (3)

$$m+2(0.22N) = 0.7N$$

$$m = 0.26N$$

จะเหลือเสื้อสีแดงคิดเป็นร้อยละ $\frac{m+n}{N-n-m}\times 100 = \frac{0.26N+0.22N}{N-0.22N-0.26N}\times 100$

$$= \frac{0.48N}{0.52N}\times 100$$

$$= \frac{48}{52}\times 100$$

$= 92.31$ (โดยประมาณ)

45. **ตอบ** 5

วิธีทำ

สมมุติ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จาก $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

จะได้ $a - b = -1$ —— (1)

$c - d = 2$ —— (2)

จาก $A^2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-a + 2b = 1$ —— (3)

$-c + 2d = 0$ —— (4)

$(1)+(3)$, $b = 0 \rightarrow$ แทน b ใน (1) จะได้ $a = -1$

$(2)+(4)$, $d = 2 \rightarrow$ แทน d ใน (2) จะได้ $c = 4$

ดังนั้น $S = -1+0+4+2 = 5$

$P = (-1)(0)(4)(2) = 0$ $\therefore\ S+P = 5$