

คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1

เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

เรื่อง ลำดับ และอนุกรม

อนุกรมอนันต์

ข้อ 3 ตอบ 4

$$\text{จากโจทย์ } a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \rightarrow a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_{n-1}a_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}a_{n+1}} \right) \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_6} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_7} \right) + \left(\frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_8} \right) + \dots \\
 &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

ข้อ 5 ตอบ 1

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4 \rightarrow \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = 4 \quad \text{--- (1)}$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{15} = 3 \rightarrow \frac{a_6(1-r^{10})}{1-r} = 3 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{(2)}{(1)}, \quad \frac{a_6(1-r^{10})}{a_1(1-r^5)} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{a_1r^5(1-r^5)(1+r^5)}{a_1(1-r^5)} = \frac{3}{4}$$

$$4r^5(1+r^5) = 3 \rightarrow 4r^{10} + 4r^5 - 3 = 0$$

$$(2r^5 - 1)(2r^5 + 3) = 0 \rightarrow r^5 = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rightarrow |r^5| = |r|^5 = \frac{1}{2}, \left(\frac{3}{2} \right) \text{ ใช้ไม่ได้ } \because |r| < 1$$

$$|r|^5 < 1$$

$$\text{นำ } r^5 = \frac{1}{2} \text{ แทนลงใน (1) จะได้ } \frac{a_1 \left(1 - \frac{1}{2} \right)}{1-r} = 4$$

$$\frac{a_1}{1-r} = 8 \rightarrow S_{\infty} = 8 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8$$

ข้อ 6 ตอบ 3

จากโจทย์ $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, $a_2 = \frac{1+2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, $a_3 = \frac{1+2+3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

จะได้ว่า $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$a_n = \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$$

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4-3} \left(\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{6}$$

ข้อ 7 ตอบ 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{8}} \cdot 2^{\frac{7}{16}} \cdot 2^{\frac{9}{32}} \cdot \dots \cdot (2^{2n+1})^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

$$= 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{8}} \cdot 2^{\frac{7}{16}} \cdot 2^{\frac{9}{32}} \cdot \dots$$

$$= 2^{\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \dots}$$

$$= 2^{S_\infty} \text{ เมื่อ } S_\infty = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \dots$$

หา S_∞ จาก

$$S_\infty = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S_\infty = \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} + \dots$$

$$\frac{1}{2}S_\infty = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

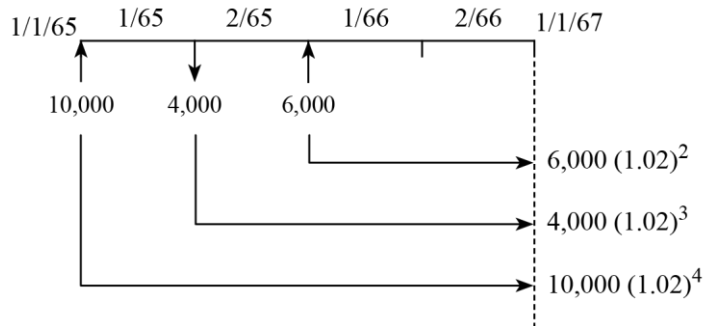
$$\frac{1}{2}S_\infty = \frac{3}{4} + \left[\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$S_\infty = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 8^{\frac{1}{4}} \cdot 32^{\frac{1}{8}} \cdot 128^{\frac{1}{16}} \cdot 512^{\frac{1}{32}} \cdot \dots \cdot (2^{2n+1})^{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2^{S_\infty} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

ดอกเบี้ย, มูลค่าเงินตามเวลา และค่างวด

ข้อ 8 ตอบ 4

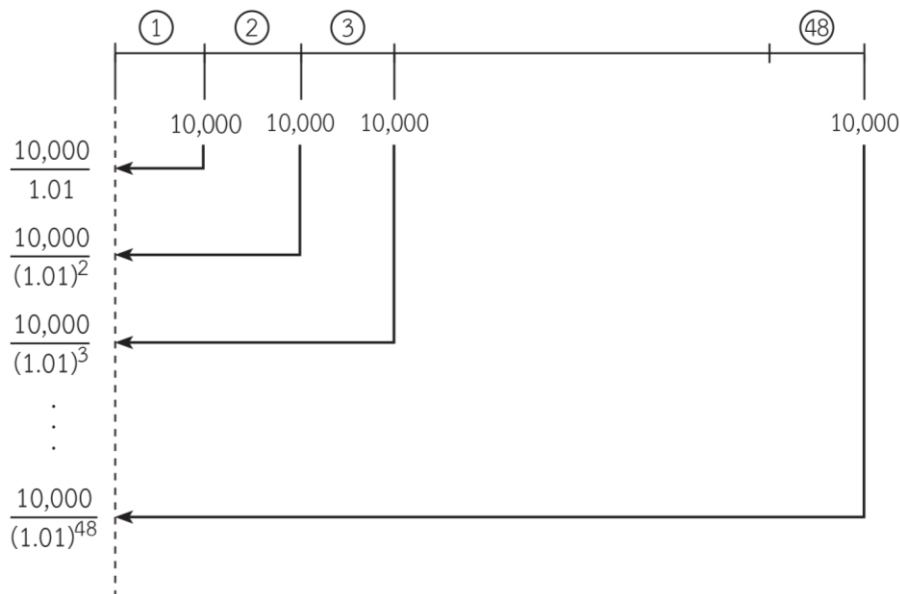


$$\text{ดอกเบี้ยต่อ 6 เดือน} = \frac{4\%}{2} = 2\%$$

$$\text{เงินรวม (1/1/67)} = 10,000(1.02)^4 - 4,000(1.02)^3 + 6,000(1.02)^2$$

ข้อ 10 ตอบ 4

ขั้นที่ 1 รวมเงินผ่อนทั้งหมดโดยเปลี่ยนให้เป็นเงิน ณ ปัจจุบัน (PV)



$$\begin{aligned}
 \text{เงินผ่อน (PV)} &= \frac{10,000}{1.01} + \frac{10,000}{(1.01)^2} + \frac{10,000}{(1.01)^3} + \dots + \frac{10,000}{(1.01)^{48}} \\
 &= \frac{\frac{10,000}{1.01} \left(1 - \left(\frac{1}{1.01} \right)^{48} \right)}{1 - \frac{1}{1.01}} \quad ** \\
 &= \frac{10,000 \left(\frac{1}{1.01} - \left(\frac{1}{1.01} \right)^{49} \right)}{1 - \frac{1}{1.01}} \\
 &= \frac{10,000 \left((1.01)^{-1} - (1.01)^{-49} \right)}{1 - (1.01)^{-1}}
 \end{aligned}$$

** จาก $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$

โดย $a_1 = \frac{10,000}{1.01}$, $r = \frac{1}{1.01}$ และ $n = 48$

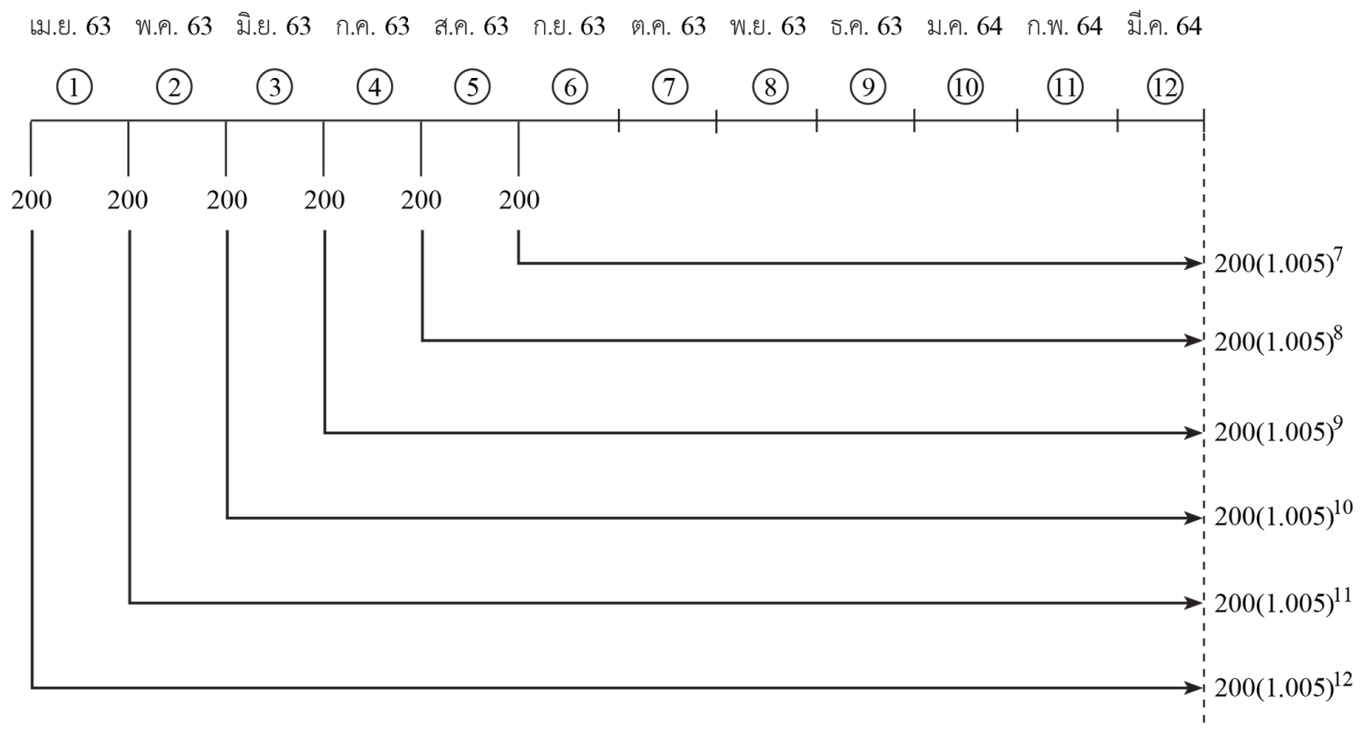
ขั้นที่ 2 จากสมการ

ราคาคอนโด = เงินดาวน์ + เงินผ่อน (PV)

∴ เงินดาวน์ = ราคาคอนโด - เงินผ่อน (PV)

$$= 600,000 - \frac{10,000((0.01)^{-1} - (1.01)^{-49})}{1 - (1.01)^{-1}}$$

ข้อ 11 ตอบ 1



$i = \frac{6\%}{12} = 0.5\%$ ต่อเดือน

จาก $FV = PV(1+i)^n$

Ex. การฝากเงินครั้งที่ 1 1 เม.ย. 63

$PV = 200$ บาท, $n = 12$

จะได้ $FV = 200 \left(1 + \frac{0.5}{100}\right)^{12} = 200(1.005)^{12}$

เงินในบัญชีเมื่อรวมทั้งหมด ณ 31 มี.ค. 64

$$\begin{aligned}
 &= 200(1.005)^7 + 200(1.005)^8 + 200(1.005)^9 + \dots + 200(1.005)^{12} \\
 &= \frac{200(1.005)^7 [(1.005)^6 - 1]}{1.005 - 1} \quad ** \\
 &= \frac{200((1.005)^{13} - (1.005)^7)}{1.005 - 1}
 \end{aligned}$$

** จากสูตร $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

โดย $a_1 = 200(1.005)^7$, $r = 1.005$ และ $n = 6$

ข้อ 12 ดูเฉลยในรูปแบบคลิปวิดีโอ

เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และลอการิทึม

สมการ Log

ข้อ 15 ตอบ 243

$$\begin{aligned}
 \frac{(2\log_3 x) - 4}{\log_3 \left(\frac{x}{9}\right)} &= \log_3(x^7) - \left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^2 - 8 \\
 \frac{2\log_3 x - 4}{\log_3 x - \log_3 9} &= 7\log_3 x - (\log_3 x)^2 - 8 \\
 \text{ให้ } \log_3 x = A \text{ จะได้ } \frac{2A - 4}{A - 2} &= 7A - A^2 - 8 \\
 2\frac{(A - 2)}{A - 2} &= 7A - A^2 - 8 \\
 2 &= 7A - A^2 - 8 \quad \text{เมื่อ } A \neq 2 \\
 A^2 - 7A + 10 &= 0 \\
 (A - 5)(A - 2) &= 0 \\
 A &= 2, 5 \quad \text{แต่ } A \neq 2 \\
 \text{ดังนั้น } A &= 5 \\
 \text{แทน } A = \log_3 x, \log_3 x &= 5 \\
 \therefore x &= 3^5 = 243
 \end{aligned}$$

ข้อ 16 ตอบ 5

$$x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} \quad \text{โดย } x, y > 0$$

$$\log_2(y \cdot 3^x) = \log_2\left(2^y \cdot \frac{3x}{2}\right)$$

$$y \cdot 3^x = 2^y \cdot \frac{3x}{2} \quad \text{---(1)}$$

$$x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \frac{2y}{3}$$

$$\log_3(12^x \cdot x) = \log_3\left(3^y \cdot \frac{2y}{3}\right)$$

$$(12^x \cdot x) = 3^y \cdot \frac{2y}{3} \quad \text{---(2)}$$

$$(1) \times (2) : \quad \cancel{y} \cdot 3^x \cdot 12^x \cdot \cancel{x} = 2^y \cdot \frac{\cancel{3} \cancel{x}}{\cancel{2}} \cdot 3^y \cdot \frac{\cancel{2} \cancel{y}}{\cancel{3}}$$

$$36^x = 6^y \rightarrow 6^{2x} = 6^y \quad \text{ดังนั้น } 2x = y$$

$$\text{แทน } y = 2x \text{ ใน (1) : } 2 \cancel{x} \cdot 3^x = 2^{2x} \cdot \frac{3 \cancel{x}}{2}$$

$$\frac{2 \times 2}{3} = \frac{4^x}{3^x} \rightarrow \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

จะได้ $x = 1$ และ $y = 2$

แสดงว่า $A = \{(1, 2)\}$ ดังนั้น $B = \{1^2 + 2^2\} = \{5\}$

$\therefore$ ผลบวกสมาชิกภายใน $B = 5$

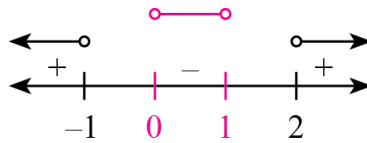
อสมการ Log

ข้อ 19 ตอบ 2

$$A : \log_x(x+2) > 2 \text{ โดย } x > 0 \text{ และ } x \neq 1$$

$$\text{พิจารณา } 0 < x < 1 : \log_x(x+2) > 2 \rightarrow x+2 < x^2$$

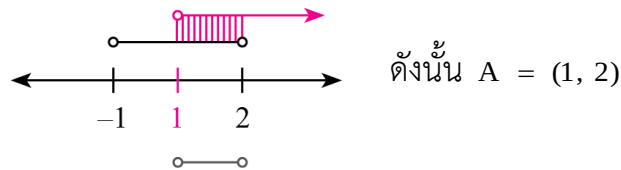
$$x^2 - x - 2 > 0 \rightarrow (x-2)(x+1) > 0$$



พบว่าไม่มีช่วงซ้ำ ดังนั้น ไม่มี x ในช่วง $(0, 1)$ ที่ทำให้อสมการเป็นจริง

$$\text{พิจารณา } x > 1 : \log_x(x+2) > 2 \rightarrow x+2 > x^2$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$



$$B : \log_2 2^{x-1} + \log_2(2^{x+1} + 1) < \log_2(7 \cdot 2^x + 12)$$

$$\log_2(2^{x-1})(2^{x+1} + 1) < \log_2(7 \cdot 2^x + 12)$$

$$2^{2x} + 2^{x-1} < 7 \cdot 2^x + 12$$

$$\times 2 : 2(2^x)^2 + (2^x) < 14 \cdot (2^x) + 24$$

$$\text{ให้ } m = 2^x$$

$$2m^2 + m < 14m + 24 \rightarrow 2m^2 - 13m - 24 < 0$$

$$(2m+3)(m-8) < 0 \rightarrow (2 \cdot 2^x + 3)(2^x - 8) < 0$$

เนื่องจาก $2^x > 0$ เสมอ ดังนั้น $2 \cdot 2^x + 3 > 0$ เสมอ ตัดได้

$$\text{แสดงว่า } 2^x - 8 < 0 \rightarrow 2^x < 2^3 \rightarrow x < 3 \text{ ดังนั้น } B = (-\infty, 3)$$

$$\text{จะได้ว่า } A \cap B = (1, 2) \subset (1, 2] \quad (\text{ตัวเลือกที่ 2})$$

ข้อ 20 ตอบ 1

$$\text{จาก } 2 + \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3}) \frac{(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4 - 3}{2 - \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^{-1}$$

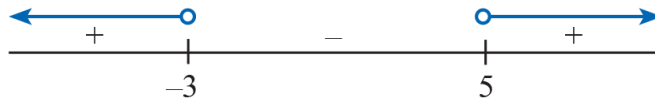
$$\text{จากโจทย์จะได้ } \log_2 (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 16} < \log_2 (2 - \sqrt{3})^{-1}$$

$$(2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 16} < (2 - \sqrt{3})^{-1}$$

$$x^2 - 2x - 16 > -1, \quad 2 - \sqrt{3} < 1 \text{ เป็น } f^{\text{ลด}}$$

$$x^2 - 2x - 15 > 0$$

$$(x - 5)(x + 3) > 0$$



$$A = (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$$

$\therefore A$ เป็นสับเซตของตัวเลือกข้อ 1

เรื่อง สถิติ

การกระจาย และความแปรปรวน

ข้อ 22 ตอบ 5

จากโจทย์ การคำนวณครั้งแรกที่ผิด

ได้ $\mu = 55$ และคำนวณ $\sigma^2 = 30$ โดยใช้ $\sum_{i=1}^{46} (x_i - 55)^2$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} \\ 30 &= \frac{\sum_{i=1}^{46} (x_i - 55)^2}{46} \end{aligned}$$

$$\text{ได้} \quad \sum_{i=1}^{46} (x_i - 55)^2 = 30 \cdot 46$$

ต่อมาพบว่าคำนวณ μ ผิด ต้องได้ $\mu = 60$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{46} (x_i - 60)^2}{46} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{46} ((x_i - 55) - 5)^2}{46} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{46} ((x_i - 55)^2 - 10(x_i - 55) + 25)}{46} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{46} ((x_i - 55)^2 - 10x_i + 550 + 25)}{46} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{46} ((x_i - 55)^2 - 10x_i + 575)}{46} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{46} (x_i - 55)^2 - 10 \sum_{i=1}^{46} x_i + \sum_{i=1}^{46} 575}{46} \quad ** \\ &= \frac{30 \cdot 46 - 10 \cdot 46 \cdot 60 + 46 \cdot 575}{46} \\ &= 30 - 600 + 575 = 5 \end{aligned}$$

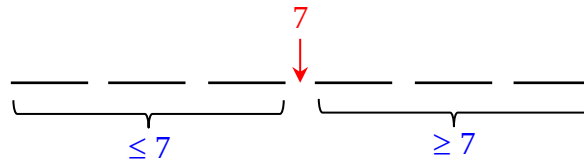
$$** \quad \sum_{i=1}^{46} x_i = N \cdot \mu = 46 \cdot 60$$

ข้อ 23 ตอบ 2

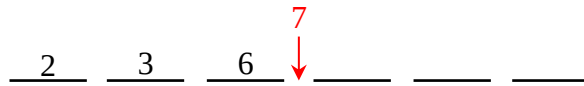
จากโจทย์จะได้ $Med = Q_2 = 7$

เมื่อ $Med = 7$ แสดงว่า เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก ข้อมูล 3 ตัวแรกจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ 7 และข้อมูล 3 ตัวถัดไปจะมากกว่าหรือเท่ากับ 7

เรียงจากน้อย $\rightarrow$ มาก



ดังนั้น x_1, x_2, x_3 คือ ข้อมูล 3 ตัวแรก เพราะทั้ง 3 ตัวมีค่าน้อยกว่า 7



สมมติให้ อีก 3 ตัวถัดไปเป็น a, b, c โดย $a \leq b \leq c$

ดังนั้น



$$\text{จะได้ว่า } \frac{6+a}{2} = 7 \rightarrow 6+a = 14 \rightarrow a = 8$$

จาก พิสัย = 16

$$\therefore c - 2 = 16$$

$$c = 18$$

และจาก $\sum_{i=1}^6 (x_i - k)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $k = 8$

เราจะได้ว่า $\mu = 8$ (เพราะ $\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$ น้อยที่สุด)

$$\text{จาก } \mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\text{จะได้ว่า } 8 = \frac{2+3+6+8+b+18}{6}$$

$$48 = 37+b$$

$$\therefore b = 11$$

ข้อมูล 6 ตัว คือ 2 3 6 8 11 18

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } \sigma^2 &= \frac{\sum (x - \mu)^2}{N} \\
 &= \frac{(2-8)^2 + (3-8)^2 + (6-8)^2 + (8-8)^2 + (11-8)^2 + (18-8)^2}{6} \\
 &= \frac{36 + 25 + 4 + 0 + 9 + 100}{6} \\
 &= 29
 \end{aligned}$$

ข้อ 24 ตอบ 10

$$\text{จาก } \mu = \frac{\sum x}{N} \rightarrow \mu = \frac{9+3+17+x}{4}$$

$$4\mu = 29 + x \rightarrow x = 4\mu - 29$$

$$\text{จากโจทย์ } \frac{\sigma}{|\mu|} = \frac{50}{100} \rightarrow \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{2}, \mu > 0 \rightarrow |\mu| = \mu$$

$$\therefore \sigma = \frac{\mu}{2}$$

$$\text{จาก } \sigma^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \mu^2$$

$$\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 = \frac{81+9+289+(4\mu-29)^2}{4} - \mu^2$$

$$\frac{\mu^2}{4} = \frac{379 + (16\mu^2 - 232\mu + 841)}{4} - \mu^2$$

$$\times 4, \mu^2 = 16\mu^2 - 232\mu + 1220 - 4\mu^2$$

$$0 = 11\mu^2 - 232\mu + 1220$$

$$0 = (11\mu - 122)(\mu - 10)$$

$$\mu = \frac{122}{11}, 10$$

$$\text{ถ้า } \mu = \frac{122}{11} \text{ จะได้ } x \text{ ไม่ใช่จำนวนเต็ม}$$

$$\text{ดังนั้น } \mu = 10 \text{ และได้ } x = 11$$

เรียงข้อมูลทั้งหมด 3, 9, $\overset{\text{Med}}{\downarrow} 11, 17$

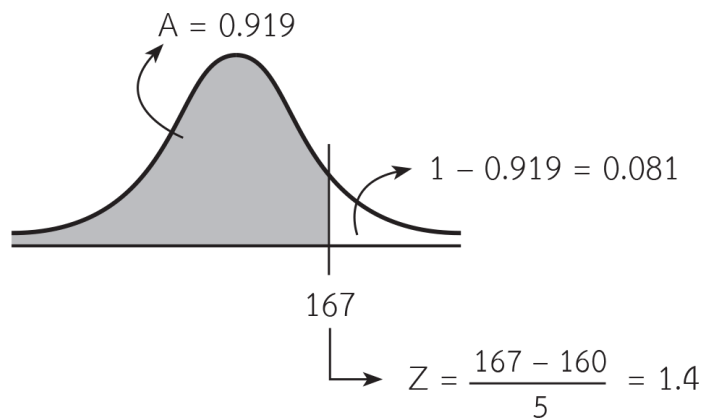
$$\text{Med} = \frac{9+11}{2} = 10$$

พื้นที่ใต้โค้งปกติ กับค่ามาตรฐาน (Z)

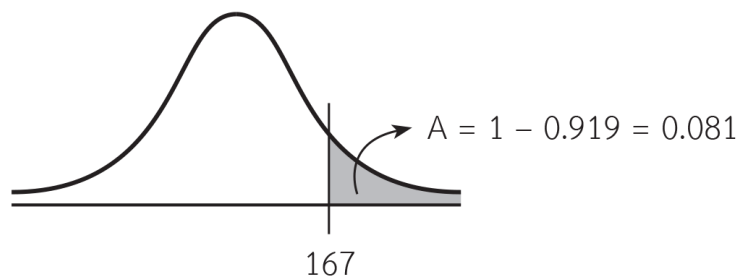
ข้อ 27 ตอบ 81 คน

จากโจทย์ $\mu = 160$ เซนติเมตร , $\sigma^2 = 25$ เซนติเมตร² $\rightarrow \sigma = 5$ เซนติเมตร

$N = 1000$ คน



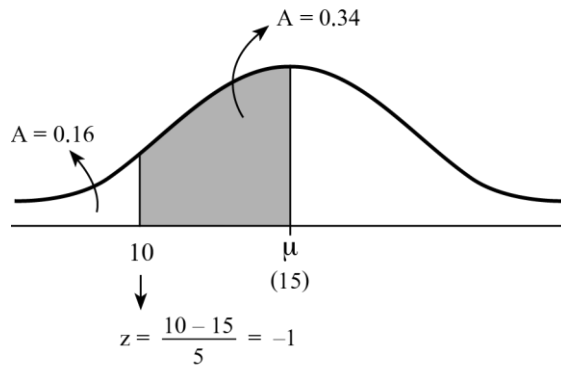
จาก $Z = 1.4 \rightarrow A = 0.919$



คาดว่าจะมีนักเรียนที่มีความสูงมากกว่า 167 เซนติเมตร

$= (0.081)(1000) = 81$ คน

ข้อ 28 ตอบ 1



จากตาราง $Z = -1 \rightarrow A = 0.16$

แสดงว่าพื้นที่แรเงา $(10 \leq x \leq 15) = 0.5 - 0.16 = 0.34$

$$\therefore P(10 \leq x \leq 15) = 0.34$$

และ $P(x < 10 \text{ หรือ } x > 15) = 1 - 0.34 = 0.66$

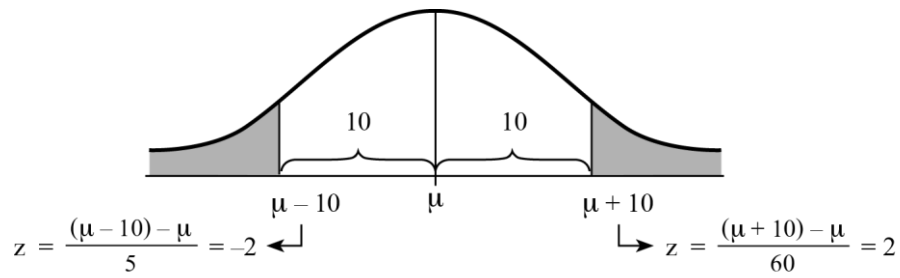
จะได้ $P(\text{อย่างน้อย 1 ต้น สูงตั้งแต่ 10 ถึง 15 เมตร})$

$$= 1 - P(\text{ไม่มีต้นใดสูงตั้งแต่ 10 ถึง 15 เมตร})$$

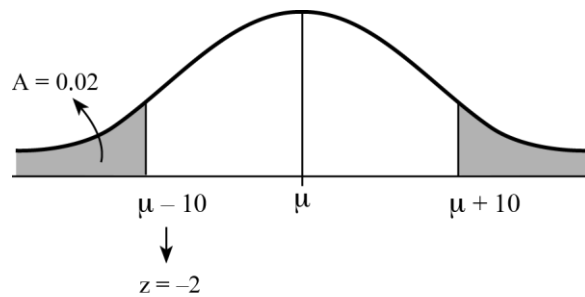
$$= 1 - [P(\text{สุ่ม 1 ต้น ไม่สูงตั้งแต่ 10 ถึง 15 เมตร})]^3$$

$$= 1 - (0.66)^3$$

ข้อ 29 ตอบ 4



ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ต้นมะค่าโมงที่มีผลต่างระหว่างความยาวเส้นผ่าศูนย์กลาง
และค่าเฉลี่ยของความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางมากกว่า 10 เซนติเมตร = พื้นที่แรเงา

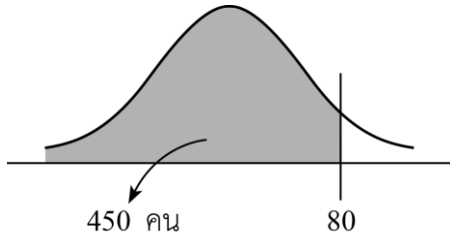


จากตาราง $Z = -2 \rightarrow$ พื้นที่ใต้เส้นโค้ง = 0.02

เนื่องจากรูปสมมาตร $\therefore$ พื้นที่แรเงา = 2×0.02
 $= 0.04$

ข้อ 30 ตอบ 72.2

$$N = 500, \sigma = 5$$



$$\text{คิดเป็น } \frac{450}{500} \times 100 = 90\%$$

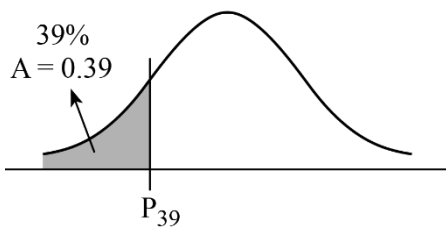
$$A = 0.9$$

$$\text{จาก } P(Z < 1.28) = 0.9$$

$$\text{แสดงว่า } x = 80 \rightarrow Z = 1.28$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow 1.28 = \frac{80 - \mu}{5}$$

$$\mu = 73.6$$



$$\text{จาก } P(Z < -0.28) = 0.39$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow -0.28 = \frac{x - 73.6}{5}$$

$$x = 72.2$$

เรื่อง ระบบจำนวนจริง และอื่นๆ

ทฤษฎีบทเศษเหลือ และตัวประกอบของพหุนาม

ข้อ 32 ตอบ 3

จากโจทย์จะพบว่า ตัวประกอบที่เหลือคือ $x + 6$

$$\text{ดังนั้น } x^3 + ax^2 + bx + 30 = (x^2 - 4x + 5)(x + 6)$$

แทนค่า $x = 1$ ลงในสมการ จะได้

$$1 + a + b + 30 = (2)(7)$$

$$\therefore a + b = -17$$

ข้อ 33 ตอบ 144

จากโจทย์จะพบว่า $\left(x + \frac{b}{6}\right)$ เป็นตัวประกอบที่เหลือ

$$\text{ดังนั้น } x^4 - 10x^3 + 25x^2 + b = (x^3 + ax^2 + x + 6)\left(x + \frac{b}{6}\right)$$

พิจารณาพจน์ x^2 ของสมการ

$$\text{ด้านซ้ายมือคือ } 25x^2, \text{ ด้านขวามือคือ } \left(\frac{ab}{6} + 1\right)x^2$$

$$\text{จากการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า } \frac{ab}{6} + 1 = 25 \rightarrow ab = 144$$

$$\therefore |ab| = |144| = 144$$

ข้อ 34 ดูเฉลยในรูปแบบคลิปวิดีโอ

ข้อ 35 ดูเฉลยในรูปแบบคลิปวิดีโอ

สมการเศษส่วนพหุนาม

ข้อ 36 ตอบ 1

ให้แผนกชายมี x คน

และแผนกบัญชีมี $12 - x$ คน

ทั้ง 2 แผนก โบนัสที่ได้รวมเท่ากันคือ 35,000 บาท

แสดงว่า แผนกชายได้คนละ $\frac{35,000}{x}$ บาท

แผนกบัญชีได้คนละ $\frac{35,000}{12 - x}$ บาท

$$\text{จากโจทย์ } \frac{35,000}{x} - \frac{35,000}{12 - x} = 2,000$$

$$\div 1,000, \quad \frac{35}{x} - \frac{35}{12 - x} = 2$$

$$\frac{35(12 - x) - 35x}{(x)(12 - x)} = 2$$

$$420 - 70x = 2(12x - x^2)$$

$$\div 2, \quad 210 - 35x = 12x - x^2$$

$$x^2 - 47x + 210 = 0$$

$$(x - 42)(x - 5) = 0 \quad \therefore x = \cancel{42}, 5 \quad (x = 42 \text{ ไม่ได้ เพราะรวม 2 แผนก ต้องได้ 12 คน})$$

แผนกชายมีจำนวนคนน้อยกว่าแผนกบัญชี $= 7 - 5 = 2$ คน

ข้อ 37 ตอบ 8 คน

ให้เดิมมีครู x คน

บริจาคคนละ $\frac{5160}{x}$ บาท

ต่อมามีครู $x + 2$ คน

บริจาคคนละ $\frac{5160}{x + 2}$ บาท

จากโจทย์ได้ว่า

$$\frac{5160}{x} - \frac{5160}{x + 2} = 215$$

$$\div 215, \quad \frac{24}{x} - \frac{24}{x + 2} = 1$$

$$\frac{24(x + 2) - 24x}{(x)(x + 2)} = 1$$

$$\frac{24x + 48 - 24x}{x^2 + 2x} = 1$$

$$48 = x^2 + 2x$$

$$0 = x^2 + 2x - 48$$

$$0 = (x - 6)(x + 8)$$

$$\therefore x = 6, -\cancel{8}$$

ปัจจุบันมีครู $6 + 2 = 8$ คน

ข้อ 38 ตอบ 3

ให้ขายไอติมรสกะทิ x แท่ง

และขายไอติมรสส้ม $26 - x$ แท่ง

จากโจทย์ กำไรจากรสส้ม + กำไรจากรสกะทิ = 120

กำไรจากรสส้ม = 2 (กำไรจากรสกะทิ)

$$\therefore 2(\text{กำไรจากรสกะทิ}) + \text{กำไรจากรสกะทิ} = 120$$

$$3(\text{กำไรจากรสกะทิ}) = 120$$

$$\text{กำไรจากรสกะทิ} = 40$$

$$\text{และได้ กำไรจากรสส้ม} = 80$$

จากโจทย์

$$\begin{array}{cc} \text{กำไรจากรสส้ม} - \text{กำไรจากรสกะทิ} & = 1 \\ \text{ต่อ 1 แท่ง} & \text{ต่อ 1 แท่ง} \end{array}$$

$$\frac{80}{26 - x} - \frac{40}{x} = 1$$

$$\frac{80x - 40(26 - x)}{(26 - x) \cdot x} = 1$$

$$80x - 1040 + 40x = 26x - x^2$$

$$x^2 + 94x - 1040 = 0$$

$$(x - 10)(x + 104) = 0$$

$$x = 10, -104$$

ข้อ 40 ดูเฉลยในรูปแบบคลิปวิดีโอ

ข้อ 41 ดูเฉลยในรูปแบบคลิปวิดีโอ

เรื่อง ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

ฟังก์ชันกำลังสอง

ข้อ 42 ตอบ 3

ให้ x แทนจำนวนกล่องคุกกี้ที่ขายได้ต่อวัน (หน่วยเป็นกล่อง)

y แทนกำไรต่อกล่อง (หน่วยเป็นบาท)

และให้ $y = ax^2 + bx + c$

จากโจทย์ ได้ว่า $x = 20 \rightarrow y = 20$

$x = 10 \rightarrow y = 0$

และ $x = 0 \rightarrow y = -40$

ดังนั้น จาก $x = 0 \rightarrow y = -40$

$$-40 = a(0)^2 + b(0) + c \quad \therefore c = -40$$

ได้สมการเป็น $y = ax^2 + bx - 40$

จาก $x = 20 \rightarrow y = 20$

$$20 = a(20)^2 + b(20) - 40$$

$$\div 20, 1 = 20a + b - 2 \rightarrow 20a + b = 3 \quad \text{--- (1)}$$

จาก $x = 10 \rightarrow y = 0$

$$0 = a(10)^2 + b(10) - 40$$

$$\div 10, 0 = 10a + b - 4 \rightarrow 10a + b = 4 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) - (2), 10a = -1 \text{ ได้ } a = -\frac{1}{10} \text{ แทนใน (2) ได้ } b = 5$$

จาก $y = ax^2 + bx + c, a < 0$

จะมีค่า y สูงสุด เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$

$$\therefore x = -\frac{5}{2(-\frac{1}{10})} = 25$$

หรือขายวันละ 25 กล่อง จะได้กำไรต่อกล่องมากที่สุด

ข้อ 43 ตอบ 2

ให้ผลิตขนมปังวันละ x ก้อน

และให้กำไรต่อวันเป็น y บาท

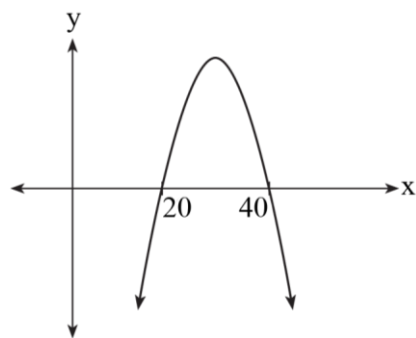
จากโจทย์ กำไร = รายได้ - ต้นทุน

$$\therefore y = (140 - 2x)(x) - [20x + 1,600]$$

$$y = -2x^2 + 120x - 1,600$$

$$y = -2(x^2 - 60x + 800)$$

$$y = -2(x - 20)(x - 40)$$



จากกราฟพบว่า ถ้าผลิตมาขาย 20 ก้อนหรือ 40 ก้อน จะเท่าทุน

และถ้าถามว่าผลิตอย่างน้อยที่สุดกี่ก้อนจึงกำไร ตอบ 21 ก้อน

(เป็นค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้ y เป็นบวก)

ข้อ 44 ตอบ 4

จาก ข้อ 43 ได้ $y = -2(x - 20)(x - 40)$

วันที่ 1 $x = 25$, $y = -2(25 - 20)(25 - 40)$

$$= -2 \cdot 5(-15) = 150 \text{ บาท}$$

วันที่ 2 ต้นทุนเพิ่ม 100 บาท ทำให้เมื่อผลิตและขาย x กล่องเท่าเดิม กำไรจะลดลง 100 บาท

ได้ $y = -2(x - 20)(x - 40) - 100$

$$x = 30 \text{ , } y = -2(30 - 20)(30 - 40) - 100$$

$$= -2(10)(-10) - 100 = 100 \text{ บาท}$$

$\therefore$ กำไรจะลดลงจากวันที่ 1 50 บาท

ข้อ 45 ตอบ 2

ให้ y เป็นค่าใช้จ่ายรวมต่อวัน

และทำขนมขาย x ชิ้นต่อวัน (x เป็นจำนวนเต็มบวก)

โดยต้นทุนทำขนม 1 ชิ้น a บาท

$\therefore x$ ชิ้น จะมีต้นทุน ax บาท (ค่าใช้จ่ายผันแปร)

และให้ค่าใช้จ่ายคงที่ต่อวันคือ b บาท

$\therefore$ จาก ค่าใช้จ่ายรวม = ค่าใช้จ่ายผันแปร + ค่าใช้จ่ายคงที่

$$y = ax + b$$

จากโจทย์ $x = 15$, $y = 3,450$ ได้ $3,450 = 15a + b$ ——(1)

และ $x = 20$, $y = 4,100$ ได้ $4,100 = 20a + b$ ——(2)

แก้ (1), (2) ได้ $a = 130$, $b = 1,500$

$$\therefore y = 130x + 1,500$$

พี่เอขายวันละ x ชิ้น ชิ้นละ 190 บาท จะมีรายได้ $190x$

กำไร = รายได้ - ค่าใช้จ่าย

$$= 190x - (130x + 1,500)$$

$$= 60x - 1,500$$

กำไรต้องมีอย่างน้อยวันละ 1,000 บาท

$$\text{กำไร} \geq 1,000$$

$$60x - 1,500 \geq 1,000$$

$$60x \geq 2,500$$

$$x \geq \frac{2,500}{60} \quad \frac{250}{6} \approx 41 \text{ กว่าๆ}$$

$\therefore x$ น้อยที่สุดคือ 42

ข้อ 46 ตอบ 2

เดือนแรก ขายขึ้นละ 50 บาท โดยทุนขึ้นละ 20 บาท

จึงได้กำไรขึ้นละ $50 - 20 = 30$ บาท

ซึ่งขายได้ 500 ชิ้น กำไรรวม $500 \times 30 = 15,000$ บาท

ต่อมลดราคา $x\%$

$$\begin{aligned}\text{กำไรต่อชิ้น} &= \text{ราคาขาย} - \text{ทุน} \\ &= \left[50 - \frac{x}{100}(50) \right] - 20 \\ &= 30 - \frac{x}{2}\end{aligned}$$

และขายได้มากขึ้น $10x$ ชิ้นต่อเดือน

ขายได้เดือนละ $= 500 + 10x$

กำไรรวม $=$ กำไรต่อชิ้น $\times$ จำนวนชิ้นที่ขายได้

$$y = \left(30 - \frac{x}{2} \right) (500 + 10x)$$

$$y = 15,000 + 300x - 250x - 5x^2$$

$$y = -5x^2 + 50x + 15,000 \quad \text{---(1)}$$

พิจารณา (ก)

ราคาขาย 45 บาท แสดงว่า ลดราคา $50 - 45 = 5$ บาท

คิดเป็น $\frac{5}{50} \times 100\% = 10\% \quad \therefore x = 10$

$$\text{กำไร} = (45 - 20) \times (500 + 10(10))$$

$$= 25 \times 600 = 15,000 \text{ บาท}$$

$\therefore$ กำไรเท่ากับเดือนแรก

(ก) ถูก

พิจารณา (ข)

จาก (1) x ที่ทำให้ y สูงสุดคือ $-\frac{b}{2a}$

โดย $y = ax^2 + bx + c \quad \therefore x = -\frac{50}{2(-5)} = 5$ จะทำให้กำไร (y) สูงสุด

5% คิดเป็น $\frac{5}{100} \times 50 = 2.5$ บาท

แสดงว่าต้องขายราคาขึ้นละ $50 - 2.5 = 47.5$ บาท จึงได้กำไรสูงสุด (ข) ผิด

พิจารณา (ค)

จาก (1) y สูงสุดคือ $\frac{4ac - b^2}{4a}$

โดย $y = ax^2 + bx + c \quad \therefore y \text{ สูงสุด} = \frac{4(-5)(15,000) - 50^2}{4(-5)}$
 $= 15,125 \quad \text{(ค) ถูก}$

เรื่อง ตรรกศาสตร์

ควบบ่งปริมาณ

ข้อ 47 ตอบ 5

พิจารณา (ก)

$$\forall x[(x > 0) \rightarrow (3|x-1| \leq |x+3|)] \equiv T$$

$$x = 0 \quad F \rightarrow T \equiv T \quad \checkmark$$

$$x = 1 \quad T \rightarrow T \equiv T \quad \checkmark$$

$$x = 2 \quad T \rightarrow T \equiv T \quad \checkmark$$

$\therefore$ (ก) ถูก

พิจารณา (ข)

$$\sim [\forall x[x > 0] \rightarrow \exists x[2x \leq 3]]$$

$$\equiv \sim [\sim \forall x[x > 0] \vee \exists x[2x \leq 3]]$$

$$\equiv \forall x[x > 0] \wedge \sim \exists x[2x \leq 3]$$

$$\equiv \forall x[x > 0] \wedge \forall x[2x > 3]$$

$\therefore$ (ข) ถูก

พิจารณา (ค)

$$\forall x[x > 0] \rightarrow \exists x[2x \leq 3]$$

$$\equiv \sim \forall x[x > 0] \vee \exists x[2x \leq 3]$$

$$\equiv \exists x[x \leq 0] \vee \exists x[2x \leq 3]$$

$\therefore$ (ค) ถูก

ข้อ 49 ตอบ 2

$$\mathcal{U} = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$(ก) \frac{1}{|x+1|} > 2 \rightarrow \frac{1}{2} > |x+1|, x \neq -1$$

$$|x+1| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ โดย } x \neq -1$$

$$\exists x \left[x / \frac{1}{|x+1|} > 2 \right] \equiv \exists x \left[x / -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}, x \neq -1 \right] \equiv F$$

$$\text{ไม่มี } x \text{ โดย } x \in \mathcal{U} \text{ ที่ } -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}, x \neq -1$$

$\therefore$ (ก) ถูก

$$(ข) |x| < \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$\forall x \left[x / |x| < \frac{1}{2} \right] \equiv \forall x \left[x / -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \right] \equiv F$$

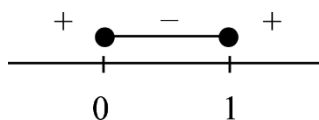
เพราะมี x บางค่า ซึ่ง $x \in \mathcal{U}$ แต่ $x \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\text{เช่น } x = \frac{1}{2} \quad \therefore (ข) \text{ ผิด}$$

เมื่อ (ก) ถูก และ (ข) ผิด ข้อนี้ตอบคำตอบ 2

$$\text{สำหรับ (ค) } x^2 - x \leq 0$$

$$(x)(x-1) \leq 0$$



$$\forall x \left[x / x^2 - x \leq 0 \right] \equiv \forall x \left[x / 0 \leq x \leq 1 \right] \equiv F$$

เพราะมี x บางค่า ซึ่ง $x \in \mathcal{U}$ แต่ $x \notin [0, 1]$

$$\text{เช่น } x \text{ ซึ่ง } x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad \therefore (ค) \text{ ถูก}$$

ข้อ 50 ตอบ 1

จากโจทย์ $4^x + 2^x = 72$

$$(2^2)^x + 2^x - 72 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 72 = 0$$

$$(2^x + 9)(2^x - 8) = 0$$

$$\therefore 2^x = \cancel{-9}, 8$$

$$2^x = 8 \rightarrow x = 3$$

$$\exists x[4^x + 2^x = 72] \equiv \exists x[x = 3]$$

ดังนั้น u ที่จะทำให้ $\exists x[x = 3]$ เป็นจริงต้องมี 3 เป็นสมาชิก เราจะใช้วิธีแทน $x = 3$

ลงในแต่ละคำตอบ คำตอบใดแทน $x = 3$ แล้วสอดคล้องกับเงื่อนไข (จริง) แสดงว่า

มี 3 เป็นสมาชิกและเป็นคำตอบ ซึ่งเมื่อเราแทน $x = 3$ ลงใน 5 คำตอบ พบว่า

มีเพียงคำตอบที่ 1 เท่านั้นที่สอดคล้อง ($|2 \cdot 3 - 3| \leq 7$ จริง)
