คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1
เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

PROBLEMS ลำดับ และอนุกรม

1. <u>ตอบ</u> 4

จากโจทย์ $a_n = \dfrac{4n+2}{1^2+2^2+3^2+\,.....\,+n^2}$

$$= \frac{2(2n+1)}{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{12}{n(n+1)}$$

$$k = \sum_{n=1}^{14} a_n$$

$$= \sum_{n=1}^{14}\left[\frac{12}{n(n+1)}\right]$$

$$= 12\sum_{n=1}^{14}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= 12\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\,.....\,+\frac{1}{14\cdot 15}\right]$$

$$= 12\left[\frac{1}{2-1}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{15}\right]\right]$$

$$= 12\left[\frac{15-1}{15}\right] = \frac{56}{5}$$

$$\therefore\ 10k = 10\left(\frac{56}{5}\right) = 112$$

2. <u>ตอบ</u> 5

$$p = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$$

$$p = \frac{1}{1-x} \rightarrow 1-x = \frac{1}{p} \rightarrow x = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$q = 1 + y + y^2 + ... = \frac{1}{1-y}$$

$$q = \frac{1}{1-y} \rightarrow 1-y = \frac{1}{q} \rightarrow y = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q}$$

$$\therefore \quad xy = \left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{q-1}{q}\right) = \frac{pq-p-q+1}{pq}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (xy)^n = xy + (xy)^2 + (xy)^3 + ...$$

$$= \frac{xy}{1-xy}$$

$$= \frac{\frac{pq-p-q+1}{pq}}{1 - \left(\frac{pq-p-q+1}{pq}\right)}$$

$$= \frac{\frac{pq-p-q+1}{pq}}{\frac{pq - (pq-p-q+1)}{pq}} = \frac{pq-p-q+1}{p+q-1}$$

3. **ตอบ** 1

ให้ r เป็นอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + ... = 7 \rightarrow \frac{a_1}{1-r} = 7 \quad \text{——(1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 3 \rightarrow a_2 + a_4 + a_6 + ... = 3 \rightarrow \frac{a_2}{1-\frac{a_4}{a_2}} = 3 \rightarrow \frac{a_2}{1-r^2} = 3 \quad \text{——(2)}$$

$\frac{(2)}{(1)}$ จะได้ $\left(\frac{a_2}{1-r^2}\right)\left(\frac{1-r}{a_1}\right) = \frac{3}{7}$

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{1}{1+r}\right) = \frac{3}{7} \quad , \quad \frac{a_2}{a_1} = r$$

$$r\left(\frac{1}{1+r}\right) = \frac{3}{7} \rightarrow 7r = 3+3r \rightarrow r = \frac{3}{4}$$

นำ $r = \frac{3}{4}$ แทนใน (1) จะได้ $a_1 = \frac{7}{4}$

$$\therefore \quad a_1 + r = \frac{7}{4}+\frac{3}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

4. **ตอบ** 3

ให้ $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$$

$$A = \frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} + ...$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{6}{3^2} + \frac{12}{3^3} + ...$$

$$\frac{1}{3}A = \frac{2}{3^2} + \frac{6}{3^3} + ...$$

$$\frac{2}{3}A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + ...$$

$$\frac{2}{9}A = \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + ...$$

$$\frac{4}{9}A = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + ...$$

$$\frac{4}{9}A = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{4}{9}A = 1 \rightarrow A = \frac{9}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้ามีผลบวกเท่ากับ $\frac{9}{4}$

5. <u>ตอบ</u> 3

$$a_n = \frac{\dfrac{(1)[(2)^{n+2}-1]}{2-1}}{3\cdot 3^{2n}} = \frac{2^{n+2}-1}{3(3^2)^n} = \frac{1}{3}\left[\frac{2^2\cdot 2^n-1}{9^n}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{3}\left[4\left(\frac{2}{9}\right)^n-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+.....+a_n) = a_1+a_2+a_3+.....$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left[4\left(\frac{2}{9}\right)^n-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4\left(\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}}\right)-\left(\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{8}{7}-\frac{1}{8}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{57}{56}\right) = \frac{19}{56}$$

6. **ตอบ** 0002.00

จากโจทย์ $a_n = (2^n)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ จะได้ $a_1 = 2^{\frac{1}{4}}$, $a_2 = 4^{\frac{1}{8}}$, $a_3 = 8^{\frac{1}{16}}$, ...

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_1a_2a_3.....a_n = a_1a_2a_3.....$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{16}} \cdot .....$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{8}} \cdot 2^{\frac{3}{16}} \cdot .....$$

$$= 2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+.....}$$

ให้ $A = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + ...$

$\frac{1}{2}A = \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + ...$ $-$

$\frac{1}{2}A = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$

$$\frac{1}{2}A = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \rightarrow A = 1$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_1a_2a_3.....a_n = 2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+.....} = 2^A = 2^1 = 2$

7. <u>**ตอบ**</u> 1

จาก $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^n}$, $a_1 = 3$

เมื่อ $n = 2$, $a_2 = a_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} = 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2}$

เมื่อ $n = 3$, $a_3 = a_2 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^3} = 3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^3}$

$$= 3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}\right)$$

เมื่อ $n = 4$, $a_4 = a_3 + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^4} = 3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^4}$

$$= 3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ...\right)$$

$$= 3 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 3 + 1 - \frac{1}{6} = \frac{23}{6}$$

8. <u>**ตอบ**</u> 5

จากโจทย์ เมื่อให้ S คือระยะทางรวมทั้งหมด

$$S = 100 + \left(\frac{3}{5}\right)(100) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 (100) + \left(\frac{3}{5}\right)^3 (100) + ...$$

$$= 100\left(1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + ...\right)$$

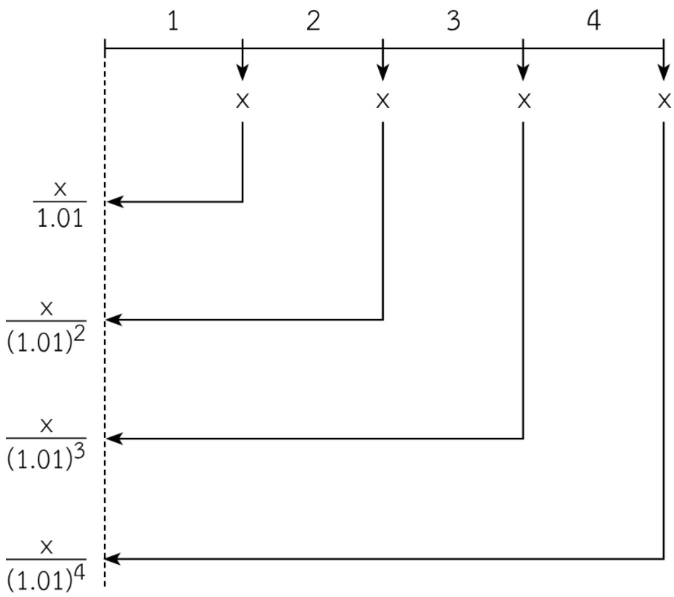
$$= 100\left(\frac{1}{1-\frac{3}{5}}\right) = 100 \times \frac{5}{2} = 250 \text{ เมตร}$$

แสดงว่าจะได้ระยะทางรวมมากกว่า 150 เมตรอยู่ 100 เมตร

9. **<u>ตอบ</u>** 2000.00

ราคา 11,800 บาท จ่ายทันที 4,000 เหลือหนี้ 7,800 บาท

กำหนดให้ ผ่อนชำระงวดละ x บาท



ให้อัตราดอกเบี้ยต่อเดือนเป็น i , $i = \frac{12\%}{12} = 1\%$

$$7,800 = \frac{x}{1.01} + \frac{x}{(1.01)^2} + \frac{x}{(1.01)^3} + \frac{x}{(1.01)^4}$$

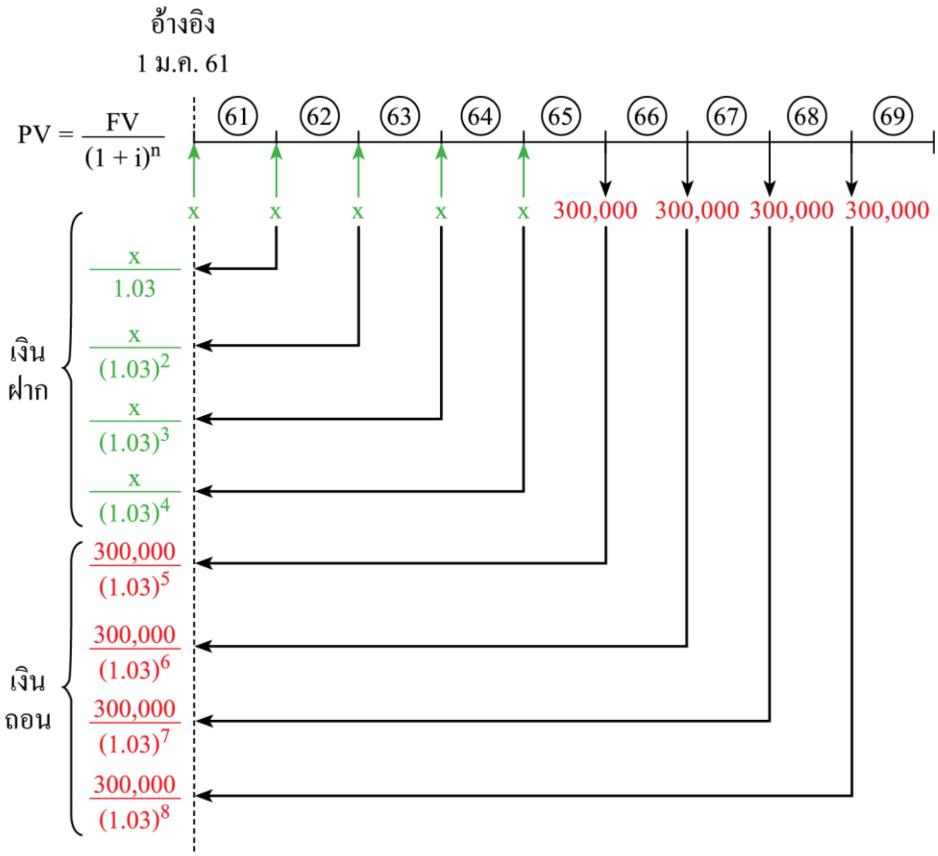
$$7,800 = \frac{x}{1.01}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1.01}\right)^4}{1-\frac{1}{1.01}}\right)$$

$$7,800 = \frac{x}{1.01}\left(\frac{1-0.961}{\frac{1.01-1}{1.01}}\right)$$

$$7,800 = x\left(\frac{0.039}{0.01}\right)$$

$\therefore$ $x = 2,000$ บาท

10. <u>**ตอบ**</u> 4



ให้แนวอ้างอิงคือ 1 มกราคม 61 โดย $i = 3\% = \dfrac{3}{100} = 0.03$

จะได้ $1+i = 1 + 0.03 = 1.03$

มูลค่าปัจจุบันของเงินฝากทั้งหมด = มูลค่าปัจจุบันของเงินถอนทั้งหมด

$$x + \frac{x}{1.03} + \frac{x}{(1.03)^2} + \frac{x}{(1.03)^3} + \frac{x}{(1.03)^4} = \frac{300,000}{(1.03)^5} + \frac{300,000}{(1.03)^6} + \frac{300,000}{(1.03)^7} + \frac{300,000}{(1.03)^8}$$

$$\frac{x\left(1 - \left(\frac{1}{1.03}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{1.03}} = \frac{\frac{300,000}{(1.03)^5} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1.03}\right)^4\right)}{1 - \frac{1}{1.03}}$$

$$x\left(1 - (1.03)^{-5}\right) = \frac{300,000\left(1 - (1.03)^{-4}\right)}{1.03^5}$$

$$x = \frac{300,000\left(1 - (1.03)^{-4}\right)}{1.03^5 - 1}$$

PROBLEMS เวกเตอร์

11. <u>**ตอบ**</u> 1

$$\bar{u}+\bar{v}+\bar{w} = \bar{0} \quad \text{———}(1)$$

จาก (1)

$$\bar{u}+\bar{v} = -\bar{w}$$

$$|\bar{u}+\bar{v}| = |-\bar{w}|$$

$$|\bar{u}+\bar{v}| = |\bar{w}|$$

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{w}|^2$$

จาก

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 + |\bar{u}-\bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$$

ได้

$$|\bar{w}|^2 + 8^2 = 2(5)^2 + 2(5)^2$$

$$|\bar{w}|^2 = 36 \quad \therefore \quad |\bar{w}| = 6$$

และจาก (1)

$$\bar{v}+\bar{w} = -\bar{u}$$

$$|\bar{v}+\bar{w}| = |-\bar{u}|$$

$$|\bar{v}+\bar{w}| = |\bar{u}|$$

$$|\bar{v}+\bar{w}|^2 = |\bar{u}|^2$$

$$|\bar{v}|^2 + 2\bar{v}\cdot\bar{w} + |\bar{w}|^2 = |\bar{u}|^2$$

$$\bar{v}\cdot\bar{w} = \frac{|\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 - |\bar{w}|^2}{2}$$

$$= \frac{5^2 - 5^2 - 6^2}{2} = -18$$

$$\therefore \quad |\bar{v}\cdot\bar{w}| = 18$$

12. <u>ตอบ</u> 4

$$\bar{u}\times\bar{v} = (\bar{a}-2\bar{b})\times(\bar{a}+2\bar{b})$$

$$= \bar{a}\times\bar{a} + \bar{a}\times 2\bar{b} - 2\bar{b}\times\bar{a} - 2\bar{b}\times 2\bar{b}$$

$$= \bar{0} + 2(\bar{a}\times\bar{b}) - 2(\bar{b}\times\bar{a}) - \bar{0}$$

$$= 2(\bar{a}\times\bar{b}) + 2(\bar{a}\times\bar{b})$$

$$= 4(\bar{a}\times\bar{b})$$

$$\therefore \quad |\bar{u}\times\bar{v}| = |4(\bar{a}\times\bar{b})| = 4|\bar{a}\times\bar{b}|$$

$$= 4|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\theta$$

$$= 4\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad *$$

$$= 4\sqrt{3}$$

* จาก $\bar{a}\cdot\bar{b} = 1 \rightarrow |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\theta = 1$

$$2\cdot 1\cdot\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\sin\theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

13. <u>ตอบ</u> 2

<u>**วิธีที่ 1**</u>

จาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3 \to \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = 3 \to b-c = 3$ ——(1)

และ $\vec{u}\times\vec{v}+\vec{w} = \vec{0} \to \vec{w} = -\vec{u}\times\vec{v} \to \vec{w} = \vec{v}\times\vec{u}$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-b-c\\a\\a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

จะได้ $a = -1$ และ $-b-c = 1$ ——(2)

$(1)+(2)$, $-2c = 4 \to c = -2$ จะได้ $b = 1$

แสดงว่า $\vec{v} = \begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$ ทำให้ $\vec{u}-\vec{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore\ |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

<u>**วิธีที่ 2**</u>

จากโจทย์ $|\vec{u}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

และ $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$ ——(*)

เนื่องจาก $(\vec{u}\times\vec{v})+\vec{w} = \vec{0} \to \vec{u}\times\vec{v} = -\vec{w} \to |\vec{u}\times\vec{v}| = |-\vec{w}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}$

จะได้ $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{3}$

จาก $|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2+|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$

$$3^2+(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2\cdot|\vec{v}|^2 \to 2|\vec{v}|^2 = 12 \to |\vec{v}|^2 = 6$$

แทนในสมการ (*) จะได้ $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\sqrt{2})^2 - 2(3) + 6$

$$= 2-6+6$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = 2$$

$$\therefore\ |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{2}$$

14. **ตอบ** 5

วิธีที่ 1

จากโจทย์ $\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{0}$ แสดงว่า $\vec{v} // \vec{u} \times \vec{w}$

$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

เนื่องจาก $\vec{v} = a\vec{i} + 3\vec{j} + b\vec{k}$

ขนานกับ $\vec{u} \times \vec{w} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}$

แสดงว่า $\frac{a}{2} = \frac{3}{-2} = \frac{b}{1}$ จะได้ $a = -3$ และ $b = -\frac{3}{2}$

$\therefore \ |\vec{v}|^2 = (-3)^2 + 3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

วิธีที่ 2

เมื่อเราทราบว่า $\vec{v} // \vec{u} \times \vec{w}$

แสดงว่า $\vec{v} \perp \vec{u}$ จะได้ว่า $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ 3 \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow a + 3 = 0 \rightarrow a = -3$

และ $\vec{v} \perp \vec{w}$ จะได้ว่า $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -3 + 6 + 2b = 0 \rightarrow b = -\frac{3}{2}$

ดังนั้น $\vec{v} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - \frac{3}{2}\vec{k}$

$\therefore \ |\vec{v}|^2 = (-3)^2 + 3^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

15. **ตอบ** 3

ข้อความ (ก) **วิธีที่ 1**

ให้ $\vec{u} = a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

$$\vec{u}\times\vec{i} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{bmatrix} = c\vec{j}-b\vec{k} \rightarrow |\vec{u}\times\vec{i}|^2 = c^2+(-b)^2 = b^2+c^2$$

$$\vec{u}\times\vec{j} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = -c\vec{i}+a\vec{k} \rightarrow |\vec{u}\times\vec{j}|^2 = (-c)^2+a^2 = a^2+c^2$$

$$\vec{u}\times\vec{k} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = b\vec{i}-a\vec{j} \rightarrow |\vec{u}\times\vec{k}|^2 = b^2+(-a)^2 = a^2+b^2$$

จะได้ $|\vec{u}\times\vec{i}|^2+|\vec{u}\times\vec{j}|^2+|\vec{u}\times\vec{k}|^2 = (b^2+c^2)+(a^2+c^2)+(a^2+b^2)$

$= 2(a^2+b^2+c^2)$

ดังนั้น $|\vec{u}\times\vec{i}|^2+|\vec{u}\times\vec{j}|^2+|\vec{u}\times\vec{k}|^2 = 2|\vec{u}|^2$ $\therefore$ ข้อความ (ก) ถูกต้อง

วิธีที่ 2

$|\vec{u}\times\vec{i}|^2+|\vec{u}\times\vec{j}|^2+|\vec{u}\times\vec{k}|^2$ ให้มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{i},\vec{j}$ และ $\vec{k}$ คือ α,β และ γ ตามลำดับ

$= (|\vec{u}||\vec{i}|\sin\alpha)^2+(|\vec{u}||\vec{j}|\sin\beta)^2+(|\vec{u}||\vec{k}|\sin\gamma)^2$

$= |\vec{u}|^2\sin^2\alpha+|\vec{u}|^2\sin^2\beta+|\vec{u}|^2\sin^2\gamma$

$= |\vec{u}|^2\left[\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right]$

$= |\vec{u}|^2\left[1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta+1-\cos^2\gamma\right]$

$= |\vec{u}|^2\left[3-\underbrace{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}_{=\,1\ \text{(โคไซน์แสดงทิศทาง)}}\right]$

$= 2|\vec{u}|^2$

ข้อความ (ข) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$ แสดงว่า $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน

ซึ่ง $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} \neq \vec{0}$ ก็ได้ $\therefore$ ข้อความ (ข) ผิด

ข้อความ (ค) จากโจทย์ $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = |\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}|$

จะได้ $|(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}|^2 = |(\vec{u}+\vec{v})-\vec{w}|^2$

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 + 2(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} + |\vec{w}|^2 = |\vec{u}+\vec{v}|^2 - 2(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} + |\vec{w}|^2$

จะได้ว่า $4(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = 0$

ดังนั้น $\vec{u}+\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{w}$ (ทำมุมกัน 90°) $\therefore$ ข้อความ (ค) ถูกต้อง

*** ซึ่งอันที่จริงในคอร์สเราเคยคุยกันไปแล้วว่า

สำหรับ $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ จะสรุปได้ทันทีว่า $\vec{a}\perp\vec{b}$ แน่ๆ

แสดงว่า สำหรับ $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = |\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}|$

น้องๆ จะสามารถสรุปได้ทันทีว่า $\vec{u}+\vec{v}\perp\vec{w}$ แน่ๆ

16. <u>ตอบ</u> 4

ข้อความ (ก) เนื่องจาก $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BC})$

แสดงว่า $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AB}$ $\therefore$ ข้อความ (ก) ถูกต้อง

ข้อความ (ข) $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}$ ตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านเวกเตอร์ $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{CA}$ เสมอ

แสดงว่า $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

ดังนั้น $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}$ ทำมุม 90° กับ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ $\therefore$ ข้อความ (ข) ถูกต้อง

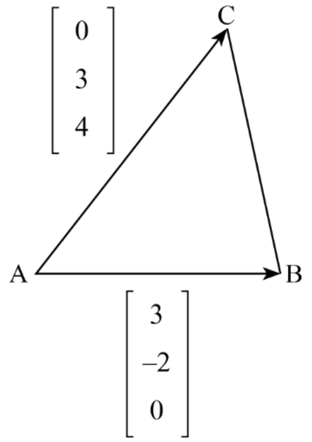
ข้อความ (ค)
$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) &= \overset{\vec{0}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB} - \overset{\vec{0}}{\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AC}} \\
&= \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} \quad (\because\ \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}) \\
&= 2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB} \\
&= -2[(-\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{AB}] \\
&= 2(\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB})
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ มีทิศเดียวกันกับ $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}$

ดังนั้น มุมระหว่างเวกเตอร์ $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ และ $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}$ มีขนาด 0°

$\therefore$ ข้อความ (ค) ผิด

ข้อความ (ง)



จาก $\overrightarrow{CA} = -3\vec{j} - 4\vec{k}$ จะได้ว่า $\overrightarrow{AC} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

เนื่องจาก

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 9^2}$$

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}\sqrt{289} = \frac{17}{2} = 8.5$ ตารางหน่วย

$\therefore$ ข้อความ (ง) ถูกต้อง

17. <u>**ตอบ**</u> 2

พิจารณา (ก)

$$(\bar{u} \cdot \bar{v})^2 + |\bar{u} \times \bar{v}|^2 = \left(|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta\right)^2 + \left(|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \sin\theta\right)^2$$

$$= |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 \cdot \cos^2\theta + |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 \cdot \sin^2\theta$$

$$= |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2 \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= |\bar{u}|^2 \cdot |\bar{v}|^2 \cdot 1 = |\bar{u}|^2 |\bar{v}|^2$$

$\therefore$ (ก) ถูก

พิจารณา (ข)

จาก

$$\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = \bar{0}$$

$$|\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}| = 0$$

$$|\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}|^2 = 0^2$$

$$|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + |\bar{w}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + 2\bar{v} \cdot \bar{w} + 2\bar{w} \cdot \bar{u} = 0$$

$$3^2 + 4^2 + 5^2 + 2(\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \bar{u}) = 0$$

$$2(\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \bar{u}) = -50$$

$$\therefore \quad \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{w} + \bar{w} \cdot \bar{u} = -25$$

$\therefore$ (ข) ผิด

พิจารณา (ค)

เมื่อ $\bar{v} \perp \bar{w}$ $\therefore$ $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore$ $(1)(5)+(-1)(4)+a(-1) = 0$

$\therefore$ $a = 1$

พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นด้านประชิด $= |\bar{u} \times \bar{v}|$

$$= \left| \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 2 \\ -(-1) \\ -1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$\therefore$ (ค) ถูก

18. <u>**ตอบ**</u> 3

พิจารณา ก.

สมมติให้เรียงจากน้อยไปมากได้

$$x_1, x_2, \ldots, x_{10}, \overset{b}{\downarrow}\, x_{11}, \ldots, x_{20}$$

ตัด x_1 ออก

$$\underbrace{x_2, x_3, \ldots, \overset{\text{Med}_{\text{ใหม่}}}{\overset{\downarrow}{x_{11}}}, \ldots, x_{20}}_{19 \text{ ตัว}}$$

ซึ่งในกรณี $x_{10} = x_{11}$ จะได้ $b = \dfrac{x_{10} + x_{11}}{2} = \dfrac{x_{11} + x_{11}}{2}$

$$= x_{11}$$

$\text{Med}_{\text{ใหม่}} = b$ ดังนั้น ก. ผิด

พิจารณา ข.

ถ้าตัดข้อมูลออก n ตัว โดยผลรวมทั้งหมด n ตัวเป็น $n\mu$ ข้อมูลชุดใหม่จะมีค่าเฉลี่ยเท่าเดิม ดังนั้น ข. ผิด เพราะค่าเฉลี่ยต้องเท่าเดิม

พิจารณา ค.

ข้อนี้แยกเป็น 2 กรณี

กรณี 1 ถ้าข้อมูลที่มีค่ามากที่สุด $\neq$ Mode เมื่อตัดข้อมูลที่มีค่ามากที่สุดออก แล้วแทนด้วย a ซึ่งมีค่าเท่ากับฐานนิยม จะทำให้ข้อมูลชุดใหม่มีฐานนิยมเท่าเดิม (ความถี่ของฐานนิยมเพิ่มขึ้น 1)

กรณี 2 ถ้าข้อมูลที่มีค่ามากที่สุด $=$ Mode เมื่อตัดข้อมูลที่มีค่ามากที่สุดออก แล้วแทนด้วย a ซึ่งมีค่าเท่ากับฐานนิยม จะทำให้ข้อมูลชุดใหม่มีฐานนิยมเท่าเดิม (ความถี่ของฐานนิยมเท่าเดิม)

$\therefore$ ค. ถูก

19. <u>ตอบ</u> 2

พิจารณา ก.

หา $\mathbf{P_{75}}$ $\rightarrow$ ตำแหน่ง $P_{75} = \frac{75}{100}(10+1) = 8.25$

P_{75} = ตำแหน่งที่ 8.25

= ตำแหน่งที่ 8 + (ตำแหน่งที่ 9 – ตำแหน่งที่ 8)(0.25)

$= 61 + (68-61)(0.25) = 62.75$

หา Med $\rightarrow$ ตำแหน่ง $\text{Med} = \frac{10+1}{2} = 5.5$

Med = ตำแหน่งที่ 5.5

$= \dfrac{\text{ตำแหน่งที่ } 5 + \text{ตำแหน่งที่ } 6}{2}$

$= \frac{55+56}{2} = 55.5$

$\therefore$ $P_{75} + \text{Med} = 62.75 + 55.5$

$= 118.25$ $\therefore$ ก. ถูก

พิจารณา ข.

ตำแหน่งของ $P_{30} = \frac{30}{100}(10+1) = 3.3$

ค่าของ P_{30} = ตำแหน่งที่ 3.3

= ตำแหน่งที่ 3 + (ตำแหน่งที่ 4 – ตำแหน่งที่ 3)(0.3)

$\therefore$ $52.9 = 52 + ((50+x) - 52)(0.3)$

$0.9 = (x-2)(0.3)$

$x-2 = 3$ $\therefore$ $x = 5$ $\therefore$ ข. ผิด

พิจารณา ค.

จาก ก. $Q_3 = P_{75} = 62.75$

หา $\mathbf{Q_1}$ $\rightarrow$ ตำแหน่ง $Q_1 = \frac{1}{4}(10+1) = 2.75$

Q_1 = ตำแหน่งที่ 2.75

= ตำแหน่งที่ 2 + (ตำแหน่งที่ 3 – ตำแหน่งที่ 2)(0.75)

$= 34 + (52-34)(0.75)$

$= 47.5$

พิสัยระหว่างควอร์ไทล์ (IQR) $= Q_3 - Q_1$

$= 62.75 - 47.5$

$= 15.25$ $\therefore$ ค. ถูก

ดังนั้น ข้อนี้มี 2 ข้อความที่ถูกต้อง คือ ก. และ ค.

20. <u>**ตอบ**</u> 5

DATA : $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, ... , $x_5 + y_5$

จะมี $\mu_{x+y} = \dfrac{(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+...+(x_5+y_5)}{5}$

$= \dfrac{(x_1+x_2+...+x_5)+(y_1+y_2+...+y_5)}{5}$

$= \dfrac{5(\mu_x)+5(\mu_y)}{5}$

$= \mu_x + \mu_y = 15+3 = 18$

จะมี $\sum_{i=1}^{5}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{5}(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2)$

$= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{5} x_iy_i + \sum_{i=1}^{5} y_i^2$

$= 5\cdot 289 + 2\cdot 5\cdot 65 + 5\cdot 25$ *

$= 5(289+130+25) = 5 \cdot 444$

*จาก $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{N} - \mu_x^2} \rightarrow 8 = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{5} - 15^2}$

$\therefore \quad \Sigma x^2 = 5 \cdot 289$

จาก $\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\Sigma y^2}{N} - \mu_y^2} \rightarrow 4 = \sqrt{\dfrac{\Sigma y^2}{5} - 3^2}$

$\therefore \quad \Sigma y^2 = 5 \cdot 25$

และ $\mu_{xy} = \dfrac{x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_5y_5}{5}$

$$65 = \frac{\Sigma xy}{5} \rightarrow \Sigma xy = 5 \cdot 65$$

$$\sigma_{x+y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i)^2}{5} - \mu_{x+y}^2$$

$$= \frac{5 \cdot 444}{5} - 18^2$$

$$= 120$$

21. **ตอบ** 25

จากโจทย์ $\mu_1 = \mu_2 = 45$

พิจารณาข้อมูลกลุ่มที่ 1

จาก $\mu_1 = \dfrac{\Sigma x_1}{N_1} \rightarrow N_1 = \dfrac{\Sigma x_1}{\mu_1} = \dfrac{900}{45} = 20$

และจาก $\sigma_1^2 = \dfrac{\Sigma x_1^2}{N_1} - \mu_1^2$

$$\sigma_1^2 = \frac{41,100}{20} - 45^2 = 30$$

จาก $\sigma_{รวม}^2 = \dfrac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} = \dfrac{20 \cdot 30 + 10 \cdot 15}{20 + 10}$

22. <u>**ตอบ**</u> 2

ให้ข้อมูลชุดที่ 2 คือ $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ โดย $y_i = 3x_i + 1$ ——(1)

พิจารณา ก.

จาก (1) เราจะได้ $\mu_y = 3\mu_x + 1$ ——(2)

และจากข้อมูลชุดที่ 1 $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ เป็นจำนวนจริงบวกทุกตัว จะได้ว่า

$\mu_x > 0$

และ $\mu_x < 3\mu_x + 1$

$\therefore$ $\mu_x < \mu_y$ ก. ถูกต้อง

พิจารณา ข.

จาก (1) เราจะได้ $IQR_y = 3 \cdot IQR_x$ ——(3)

แต่จากโจทย์พบว่า ในบางกรณีจะให้ค่า $IQR_x = IQR_y = 0$

เช่น ข้อมูลชุดที่ 1 คือ 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

ซึ่งทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก และพิสัย $\neq 0$ แต่เราพบว่า

ตำแหน่ง $Q_1 = \frac{1}{4}(10+1) = 2.75$ $\therefore$ $Q_1 = 2$

ตำแหน่ง $Q_3 = \frac{3}{4}(10+1) = 8.25$ $\therefore$ $Q_3 = 2$

$IQR_x = Q_3 - Q_1 = 2 - 2 = 0$

และจาก (3) ได้ $IQR_y = 3 \cdot 0 = 0$ ดังนั้น $IQR_x = IQR_y = 0$

$\therefore$ ข. ผิด

พิจารณา ค.

เมื่อกำหนดข้อมูลชุดที่ 1 พิสัย $\neq 0$ แสดงว่าข้อมูลไม่ได้เท่ากันทุกตัว $\therefore \; \sigma_x \neq 0$

จาก (1) $\sigma_y = 3\sigma_x$

ส.ป.ส. การแปรผันของชุดที่ 1 $= \dfrac{\sigma_x}{\mu_x}$

ส.ป.ส. การแปรผันของชุดที่ 2 $= \dfrac{\sigma_y}{\mu_y}$

$$= \frac{3\sigma_x}{3\mu_x + 1}$$

$$= \frac{\frac{3\sigma_x}{3}}{\frac{3\mu_x + 1}{3}}$$

$$= \frac{\sigma_x}{\mu_x + \frac{1}{3}}$$

จาก $\dfrac{\sigma_x}{\mu_x} > \dfrac{\sigma_x}{\mu_x + \frac{1}{3}}$

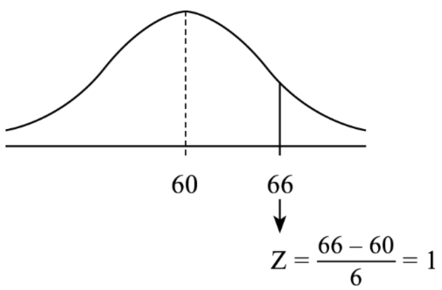
ดังนั้น ส.ป.ส. การแปรผันของชุดที่ 1 มากกว่า ส.ป.ส. การแปรผันของชุดที่ 2

$\therefore$ ค. ถูกต้อง

23. **<u>ตอบ</u>** 387 คน

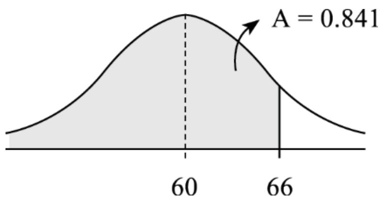
จากการแจกแจงปกติ $\mu = \text{Med} = 60$

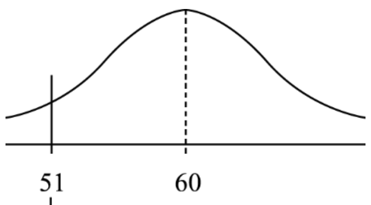
และจากโจทย์ $\sigma^2 = 36 \quad \therefore \; \sigma = 6$



จากตาราง $Z = 1 \rightarrow A = 0.841$

ดังนั้น

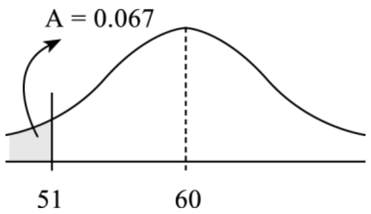




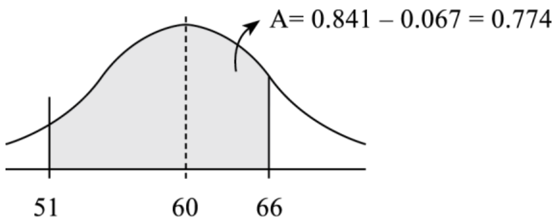
$$Z = \frac{51 - 60}{6} = -1.5$$

จากตาราง $Z = -1.5 \rightarrow A = 0.067$

ดังนั้น



ซึ่งจะได้ว่า พ.ท. ในบริเวณ $51 < x < 66$ คือ 0.774 ดังรูป



$\therefore$ จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนมากกว่า 51 คะแนน

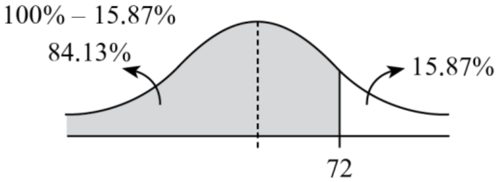
แต่น้อยกว่า 66 คะแนน $(51 < x < 66) = 0.774 \times 500$

$= 387$ คน

24. <u>**ตอบ**</u> 6.68

จาก ส.ป.ส. การแปรผัน $= \dfrac{\sigma}{\mu}$, สมมติให้ $\mu > 0$

จากโจทย์ $\dfrac{20}{100} = \dfrac{\sigma}{\mu} \rightarrow \mu = 5\sigma$



จากตาราง $A = 0.8413 \rightarrow Z = 1$

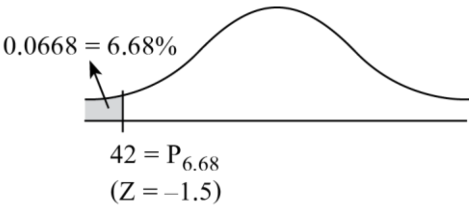
จาก $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow 1 = \dfrac{72-5\sigma}{\sigma}$

$$6\sigma = 72 \qquad \therefore \sigma = 12$$

และ $\mu = 5(12) = 60$

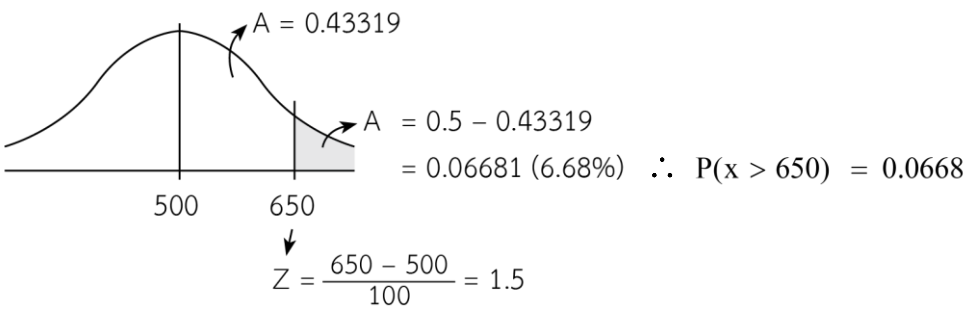
ถ้า $x = 42$ จะได้ $Z = \dfrac{42-60}{12} = -1.5$

จากตาราง $Z = -1.5 \rightarrow A = 0.0668$



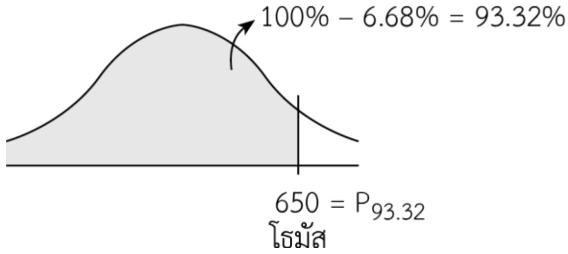
25. <u>**ตอบ**</u> 5

SAT $\mu = 500$, $\sigma = 100$



จากรูป คำตอบที่ 2 ถูก

และ



ถ้ามีคนสอบ SAT 2 ล้านคน

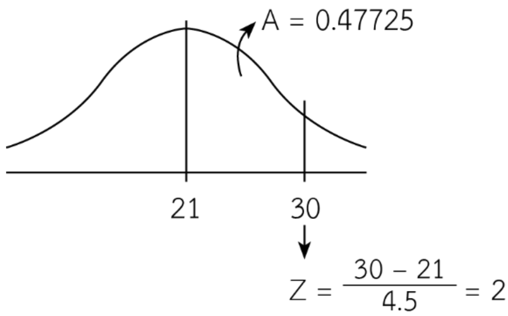
จะมีคนสอบได้น้อยกว่าโธมัส $= \frac{93.32}{100} \cdot 2{,}000{,}000$

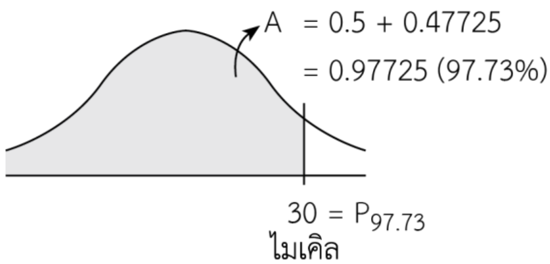
$= 1{,}866{,}400$

≈ 1.866 ล้านคน

$\therefore$ คำตอบที่ 4 ถูก

ACT $\mu = 21\ ,\ \sigma = 4.5$





จากรูป คำตอบที่ 1 ถูก

และได้ว่า คำตอบที่ 3 ถูก เพราะ โธมัส ตรงกับ $P_{93.32}$ และ ไมเคิลตรงกับ $P_{97.73}$

เราพบว่า มีเพียง $100\% - 97.73\% = 2.27\%$ เท่านั้นที่คะแนนมากกว่าไมเคิล

คิดเป็น $\frac{2.27}{100} \times 2{,}000{,}000 = 45{,}400$ คน

$\therefore$ คำตอบที่ 5 ผิด

26. **<u>ตอบ</u>** 4

X	300	700	1,100	1,500
f(x)	$\frac{56}{220} = \frac{14}{55}$	$\frac{112}{220} = \frac{28}{55}$	$\frac{48}{220} = \frac{12}{55}$	$\frac{4}{220} = \frac{1}{55}$

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} \qquad \frac{\binom{8}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} \qquad \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} \qquad \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$$

ความน่าจะเป็นที่จะได้รับเงินอย่างน้อยสุด ซึ่งคือ 300 บาท $= \frac{14}{55}$

$\therefore$ (ก) ถูก

ความน่าจะเป็นที่จำนวนเงินที่เขาได้รับไม่น้อยกว่า 1,000 บาท

$$= P(X = 1{,}100) + P(X = 1{,}500)$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{1}{55} = \frac{13}{55}$$

$\therefore$ (ข) ถูก

$$E(X) = 300 \cdot \frac{14}{55} + 700 \cdot \frac{28}{55} + 1{,}100 \cdot \frac{12}{55} + 1{,}500 \cdot \frac{1}{55}$$

$= 700$ บาท

$\therefore$ (ค) ถูก

27. <u>ตอบ</u> 5

พิจารณา ก.

ให้ตัวแปรสุ่ม (X) = เงินรางวัล

x	100	50	20	0
f(x)	0.1	0.2	0.5	0.2

$E(X) = 100(0.1) + 50(0.2) + 20(0.5) + 0(0.2)$

$= 10+10+10+0 = 30$ $\therefore$ ก. ถูก

พิจารณา ข.

ให้ตัวแปรสุ่ม (Y) = กำไร

โดย $Y = X-40$

$\therefore$ $E(Y) = E(X-40)$

$= E(X) - 40$

$= 30-40 = -10$

$\therefore$ โดยเฉลี่ยแล้ว ขาดทุนครั้งละ 10 บาท $\therefore$ ข. ถูก

พิจารณา ค.

$\sigma^2 = \Sigma\left[(x-\mu)^2 \cdot f(x)\right]$

$= 70^2(0.1) + 20^2(0.2) + 10^2(0.5) + 30^2(0.2)$

$= 490+80+50+180$

$= 800$ $\therefore$ ค. ถูก

28. **<u>ตอบ</u>** 4

ข้อนี้เป็นเรื่องการแจกแจงแบบทวินาม ให้ตัวแปรสุ่ม X คือ จำนวนข้อที่เดาถูก

p แทนความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จ คือเดาถูก ซึ่ง $p = \frac{1}{5} = 0.2$

ดังนั้น $P(X = x) = \binom{5}{x}(0.2)^x(0.8)^{5-x}$

ให้ Y แทนคะแนนที่ได้เมื่อถูก X ข้อ

$$\begin{aligned} Y &= 5(X) - 1\cdot(5-X) \\ &= 6X - 5 \end{aligned}$$

(ก) ถ้าสอบผ่านต้องได้อย่างน้อย 7 คะแนน

แสดงว่า $Y \ge 7 \rightarrow 6X - 5 \ge 7$

$$6X \ge 12$$

$$X \ge 2$$

$$\begin{aligned} P(X \ge 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right] \\ &= 1 - \left[(0.8)^5 + \binom{5}{1}(0.2)(0.8)^4\right] \\ &= 1 - \left[(0.8)^5 + (0.8)^4\right] \end{aligned}$$

$\therefore$ (ก) ถูก

(ข) จาก

$$\begin{aligned} Y &= 6X - 5 \\ E(Y) &= E(6X-5) \\ &= 6E(X) - E(5) \\ &= 6E(X) - 5 \end{aligned}$$

โดย $E(X) = np = 5(0.2) = 1$

และจะได้ $E(Y) = 6(1) - 5 = 1$ $\therefore$ (ข) ถูก

(ค) $\sigma_x^2 = np(1-p) = 5\cdot(0.2)(0.8) = 0.8$

$\therefore$ (ค) ถูก

29. **ตอบ** 2

เมื่อ $x-1$ และ $x+1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แสดงว่า

หาร $P(x)$ ด้วย $x-1$ และ $x+1$ เศษ $= 0$

$\therefore$ $P(1) = 0$ และ $P(-1) = 0$

จาก $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$

แทน $x = 1 \rightarrow P(1) = 2+1+a+b$

$$0 = 3+a+b \rightarrow a+b = -3 \quad \text{———}(1)$$

แทน $x = -1 \rightarrow P(-1) = -2+1-a+b$

$$0 = -1-a+b \rightarrow -a+b = 1 \quad \text{———}(2)$$

$(1) + (2)$, $2b = -2 \rightarrow b = -1$

แทน $b = -1$ ใน (1) ได้ $a = -2$

ดังนั้น $b-ax = -1-(-2)x = 2x-1$

และ $P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

$\therefore$ หาร $P(x)$ ด้วย $2x-1$ เศษ $= P\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 - 1 = -1.5$$

30. **<u>ตอบ</u>** 4

จากโจทย์ $P(0) = 1 \rightarrow 0+0+0+c = 1 \rightarrow c = 1$

แทน $c = 1$ ลงใน $P(x)$ จะได้ว่า $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

จาก $P(1) = 0$ แสดงว่า $(x-1)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

ให้ตัวประกอบที่เหลือเป็น $(x-m)$ และ $(x-n)$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 = (x-1)(x-m)(x-n)$

จากการเทียบพจน์ค่าคงตัว จะได้ $1 = (-1)(-m)(-n) \rightarrow mn = -1$

แต่โจทย์กำหนดว่ารากของสมการเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $m = 1$ และ $n = -1$

แทนค่า m, n ลงใน $P(x)$ จะได้ว่า

$P(x) = (x-1)(x-1)(x+1) \quad \therefore \quad P(3) = (2)(2)(4) = 16$

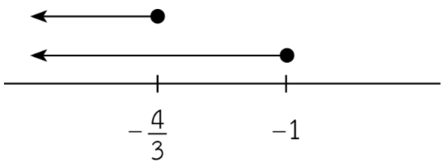
31. **<u>ตอบ</u>** 1

$A : |x| \ge 7x+8$

$x \ge 7x+8$ <u>หรือ</u> $x \le -7x-8$

$-8 \ge 6x \quad \cup \quad 8x \le -8$

$-\frac{4}{3} \ge x \qquad x \le -1$



$A = (-\infty, -1]$

$B : \frac{1}{x^2 + x} \le \frac{1}{2x^2 + 2x + 3}$

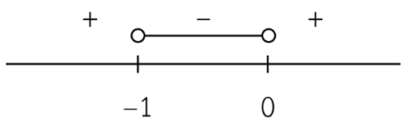
$$\frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{2x^2 + 2x + 3} \le 0$$

$$\frac{(2x^2 + 2x + 3) - (x^2 + x)}{(x^2 + x)(2x^2 + 2x + 3)} \le 0$$

$$\frac{x^2 + x + 3}{(x)(x+1)\cancel{2\left((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}\right)}} \le 0 \qquad \left(\times 2\left((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}\right) \text{ 2 ข้าง}\right)$$

$$\frac{\cancel{\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}\right]}}{(x)(x+1)} \le 0 \qquad \left(\div\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}\right]\ 2\ \text{ข้าง}\right)$$

$$\frac{1}{(x)(x+1)} \le 0\ ,\ x \ne 0, -1$$



$$B = (-1, 0)$$

$$A \cap B = \{\ \}$$

$\therefore$ จำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มของ $A \cap B = 0$

32. **ตอบ** 3

จากโจทย์

$$\left|x^2-2\right| - \left|x-2\right| \le 0$$

$$\left|x^2-2\right| \le \left|x-2\right| \ **$$

$$\left|x^2-2\right|^2 \le \left|x-2\right|^2$$

$$(x^2-2)^2 \le (x-2)^2$$

$$(x^2-2)^2 - (x-2)^2 \le 0$$

$$\left[(x^2-2)-(x-2)\right]\left[(x^2-2)+(x-2)\right] \le 0$$

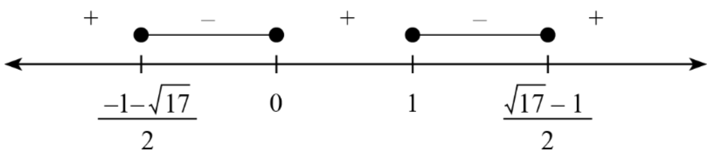
$$(x^2-x)(x^2+x-4) \le 0$$

$$(x)(x-1)\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-4-\frac{1}{4}\right) \le 0$$

$$(x)(x-1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{17}{4}\right) \le 0$$

$$(x)(x-1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{17}}{2}\right) \le 0$$

$$(x)(x-1)\left(x-\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\right) \le 0$$



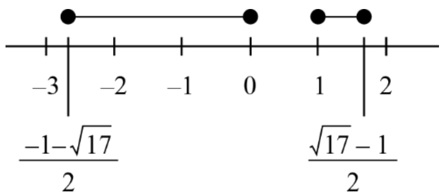
$$4 < \sqrt{17} < 5 \qquad \text{และ} \qquad 4 < \sqrt{17} < 5$$

$$-4 > -\sqrt{17} > -5 \qquad\qquad 3 < \sqrt{17}-1 < 4$$

$$-5 > -1-\sqrt{17} > -6 \qquad\qquad \frac{3}{2} < \frac{\sqrt{17}-1}{2} < 2$$

$$-\frac{5}{2} > \frac{-1-\sqrt{17}}{2} > -3$$

$$\therefore\ -3 < \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < -\frac{5}{2}$$



ดังนั้น เมื่อ $x \in Z$ และ $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$

$\therefore\ x = -2, -1, 0, 1$ (4 จำนวน)

** สามารถใช้สูตร $|\square| \le |\Delta|$

จะได้ $(\square - \Delta)(\square + \Delta) \le 0$ ได้

33. <u>**ตอบ**</u> 4

จาก $\left|x^2 + 5x\right| + \left|x - x^2\right| > \left|2x^2 + 4x\right|$

ได้ $\left|x^2 + 5x\right| + \left|x - x^2\right| > \left|(x^2 + 5x) - (x - x^2)\right|$

และจาก $|a| + |b| > |a - b|$ เมื่อ $a \cdot b > 0$

$$\therefore\ (x^2 + 5x)(x - x^2) > 0$$

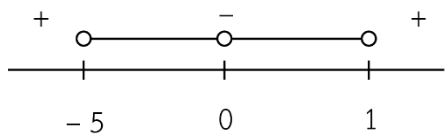
นำ –1 คูณ 2 ข้าง

$$(x^2 + 5x)(x^2 - x) < 0$$

$$(x)(x+5)(x)(x-1) < 0$$

$$x^2(x+5)(x-1) < 0$$

$$(x+5)(x-1) < 0 \ ,\ x \neq 0$$

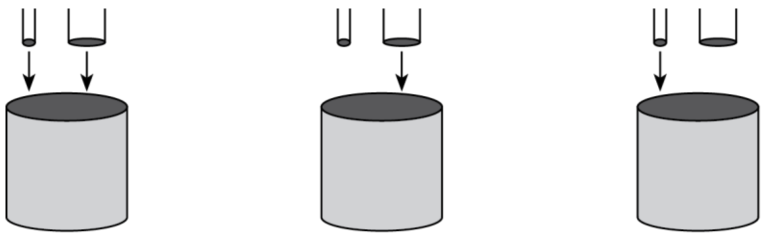


$\therefore$ จำนวนเต็มทั้งหมดที่เป็นคำตอบคือ $-4, -3, -2, -1$

และผลคูณของทั้งหมด $= (-4)(-3)(-2)(-1) = 24$

34. <u>**ตอบ**</u> 4

จากโจทย์แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



เต็มถังใน	เต็มถังใน	เต็มถังใน
6 ชั่วโมง	x ชั่วโมง	$x+5$ ชั่วโมง

ให้เปิดท่อใหญ่เพียงท่อเดียว เต็มถังใน x ชั่วโมง

จะได้ว่าเปิดท่อเล็กเพียงท่อเดียว เต็มถังใน $x+5$ ชั่วโมง

ซึ่งเราจะได้ว่า เปิด 2 ท่อพร้อมกัน

6 ชั่วโมงได้ 1 ถัง

$\therefore$ 1 ชั่วโมงได้ $\frac{1}{6}$ ถัง

เปิดท่อใหญ่เพียงท่อเดียว

x ชั่วโมงได้ 1 ถัง

$\therefore$ 1 ชั่วโมงได้ $\frac{1}{x}$ ถัง

และเปิดท่อเล็กเพียงท่อเดียว

$x+5$ ชั่วโมงได้ 1 ถัง

$\therefore$ 1 ชั่วโมงได้ $\frac{1}{x+5}$ ถัง

ปริมาณน้ำเมื่อเปิด 2 ท่อ = ปริมาณน้ำเปิดท่อใหญ่ + ปริมาณน้ำเปิดท่อเล็ก
ใน 1 ชั่วโมง ใน 1 ชั่วโมง ใน 1 ชั่วโมง

$$\therefore \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{x+5+x}{x(x+5)}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2x+5}{x^2+5x}$$

$$x^2 + 5x = 12x + 30$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$(x-10)(x+3) = 0$$

$$\therefore \quad x = 10, \cancel{-3}$$

ดังนั้น เปิดท่อใหญ่ท่อเดียวน้ำจะเต็มใน 10 ชั่วโมง

35. <u>**ตอบ**</u> 3

จากโจทย์จะได้ว่า

ให้อัตราเร็วของการบินปกติคือ x กิโลเมตรต่อชั่วโมง

	<u>บินปกติ</u>	**<u>สภาพอากาศแปรปรวน</u>**	**<u>หน่วย</u>**
ระยะทาง (S)	1,500	1,500	กิโลเมตร
อัตราเร็ว (V)	x	$x-100$	กิโลเมตรต่อชั่วโมง
เวลา $\left(t = \frac{S}{V}\right)$	$\frac{1,500}{x}$	$\frac{1,500}{x-100}$	ชั่วโมง

จากโจทย์จะได้ เวลาเมื่อสภาพอากาศแปรปรวน – เวลาปกติ จะเท่ากับ $\frac{10}{60}$ ชั่วโมง (10 นาที)

$$\frac{1,500}{x-100} - \frac{1,500}{x} = \frac{10}{60}$$

$$\frac{1,500x - 1,500(x-100)}{(x-100)(x)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1,500x - 1,500x + 150,000}{x^2 - 100x} = \frac{1}{6}$$

$$900,000 = x^2 - 100x$$

$$0 = x^2 - 100x - 900,000$$

$$0 = (x-1,000)(x+900)$$

$$\therefore\ x = 1,000\ ,\ \cancel{-900}$$

36. **ตอบ** 4

จากโจทย์ วงเงินต่อวัน $= \frac{3,600}{6} = 600$ บาท

ตอนแรก จ้างคนงาน x คนต่อวัน แสดงว่าค่าจ้างคือคนละ $\frac{600}{x}$ บาทต่อวัน

ต่อมาลดคนงานลง 4 คน เป็น $x-4$ คนต่อวัน

แสดงว่า ค่าจ้างลดเหลือคนละ $\frac{600}{x-4}$ บาทต่อวัน

จากโจทย์ พบว่าค่าแรงสูงขึ้นคนละ 5 บาท

แสดงว่า

$$\frac{600}{x-4} - \frac{600}{x} = 5$$

$$\frac{120}{x-4} - \frac{120}{x} = 1$$

$$\frac{120x - 120(x-4)}{(x-4)\cdot x} = 1$$

$$\frac{120x - 120x + 480}{x^2 - 4x} = 1$$

$$480 = x^2 - 4x$$

$$0 = x^2 - 4x - 480$$

$$0 = (x-24)(x+20)$$

$$x = 24, \cancel{-20}$$

$\therefore$ เดิมจ้างคนงาน 24 คน

37. <u>ตอบ</u> 2

$A = D_{r_1^{-1}} = R_{r_1}$ และ $B = R_{r_2} = D_{r_2^{-1}}$

หา A $y = \sqrt{36-25x^2}$

เราพบว่า y_{max} เกิดเมื่อ $x = 0$

$$y_{max} = \sqrt{36-0} = 6$$

และพบว่า $y_{min} = 0$ เกิดเมื่อใน $\sqrt{\ }$ เป็น 0 $\left(x = \pm\sqrt{\frac{36}{25}}\right)$

$\therefore$ $A = R_{r_1} = [0, 6]$

หา B $x^2 + |1-y|x^2 = 4$

$$|1-y|x^2 = 4-x^2$$

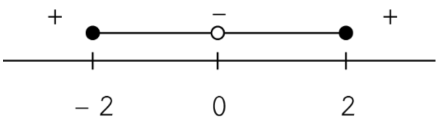
$$|1-y| = \frac{4-x^2}{x^2}$$

$$\frac{4-x^2}{x^2} \geq 0$$

คูณ -1 , $$\frac{x^2-4}{x^2} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x^2} \leq 0$$

$$(x-2)(x+2) \leq 0 \ , \ x \neq 0$$



$\therefore$ $B = [-2, 0) \cup (0, 2]$

$B' \cap A = A \cap B' = A - B = \{0\} \cup (2, 6]$

$B' \cap A$ มีสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มอยู่ 5 ตัว ได้แก่ 0, 3, 4, 5, 6

38. <u>ตอบ</u> 2

หา A

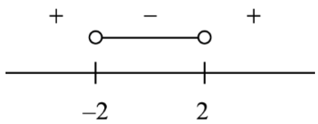
โดย $A = R_{f^{-1}} = D_f$

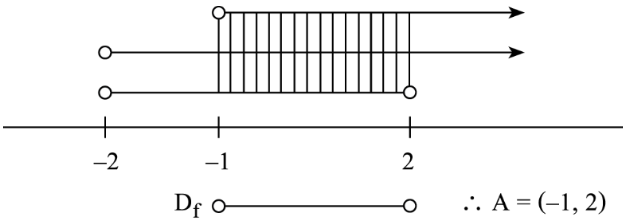
จาก $y = \log(x+1) + \log(x+2) - \log(4-x^2)$

จะได้ว่า $x+1 > 0$ และ $x+2 > 0$ และ $4-x^2 > 0$

$x > -1$ $\quad x > -2$ $\quad x^2 - 4 < 0$

$(x+2)(x-2) < 0$





$\therefore A = (-1, 2)$

หา B

โดย $B = D_g = R_{g^{-1}}$

จาก $y = 2^{x-1}$ และ $x \geq 0$

เราจะได้ $D_{g^{-1}}$ คือ $\{x / x \geq 0\}$

$\therefore \; x \geq 0$

$x - 1 \geq 0 - 1$

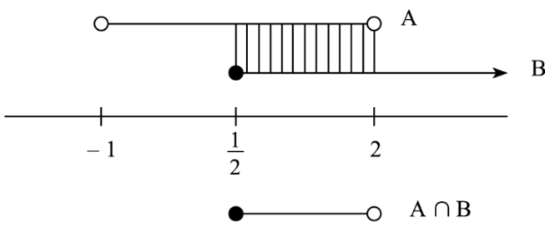
$x - 1 \geq -1$

$2^{x-1} \geq 2^{-1}$

$y \geq \frac{1}{2}$

จะได้ $R_{g^{-1}} = [\frac{1}{2}, \infty)$ $\quad \therefore \; B = [\frac{1}{2}, \infty)$

ดังนั้น $A \cap B = [\frac{1}{2}, 2)$ และ $A \cap B \subset [0.5, 2.5)$



39. <u>**ตอบ**</u> 0005.00

จาก $f^{-1}(x+2) = \dfrac{3x-2}{2x+3}$

$$x+2 = f\left(\frac{3x-2}{2x+3}\right)$$

จาก $f\left(\dfrac{3x-2}{2x+3}\right) = x+2$

หา $f\left(\dfrac{1}{a-4}\right)$

$$\frac{3x-2}{2x+3} = \frac{1}{a-4}$$

$$(3x-2)(a-4) = 2x+3$$

$$3ax-12x-2a+8 = 2x+3$$

$$3ax-14x = 2a-5$$

$$x(3a-14) = 2a-5$$

$$x = \frac{2a-5}{3a-14}$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{a-4}\right) = \frac{2a-5}{3a-14}+2 = \frac{2a-5+6a-28}{3a-14}$$

$$= \frac{8a-33}{3a-14}$$

ดังนั้น $f\left(\dfrac{1}{x-4}\right) = \dfrac{8x-33}{3x-14}$

จะได้ $a = 8$, $b = -33$, $c = 3$ และ $d = -14$

$$\therefore\ \frac{a+b}{3c+d} = \frac{8+(-33)}{3(3)+(-14)} = \frac{-25}{-5} = 5$$

40. **ตอบ** 2

จากโจทย์เราจะพบว่า เมื่อหา $f^{-1}(x)$

$\mathbf{x \rightleftharpoons y}$ $$x = \frac{2y+1}{y+5}$$

$$xy+5x = 2y+1$$

$$5x-1 = 2y-xy$$

$$5x-1 = (2-x)y$$

$$y = \frac{5x-1}{2-x}$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{5x-1}{2-x}$$

แสดงว่า $g = f^{-1}$

ดังนั้น $fog(1) + gof\left(\frac{1}{2}\right) + fog\left(\frac{1}{4}\right) + gof\left(\frac{1}{8}\right) + \ldots..$

$$= fof^{-1}(1) + f^{-1}of\left(\frac{1}{2}\right) + fof^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + f^{-1}of\left(\frac{1}{8}\right) + \ldots..$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots..$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Note $fof^{-1}(\square) = \square$ เมื่อ $\square \in D_{f^{-1}} \rightarrow \square \in R_f$

และ $f^{-1}of(\Delta) = \Delta$ เมื่อ $\Delta \in D_f$

41. <u>ตอบ</u> 4

$$g(x) = fof(x)$$
$$= f(f(x))$$
$$= f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{(1-x)-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$$

$$h(x) = f\left(f(f(x))\right)$$
$$= f(g(x))$$
$$= f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)} = \frac{1}{\frac{x-(x-1)}{x}} = \frac{x}{1} = x$$

หา $\mathbf{g^{-1}(x)}$ จาก $g(x) = \frac{x-1}{x}$

Inv $x = \frac{y-1}{y} \rightarrow xy = y-1 \rightarrow xy-y = -1$

$(x-1)y = -1 \rightarrow y = \frac{-1}{x-1}$ $\quad\therefore\quad g^{-1}(x) = \frac{-1}{x-1}$

$\therefore\quad (g^{-1}\cdot h)(x) = g^{-1}(x)\cdot h(x) = \frac{-1}{x-1}\cdot x = \frac{-x}{x-1}$

42. <u>**ตอบ**</u> 0019.00

$f^{-1}(x) = 3x^3 + 2$ และ $g(x) = \dfrac{13-4x}{17}$

$(fog^{-1})(k) = -1 \rightarrow f(g^{-1}(k)) = -1$

$$g^{-1}(k) = f^{-1}(-1)$$

$$k = g(f^{-1}(-1)) \quad *$$

$$= g(-1) \quad **$$

$$= 1$$

$$(f-g^{-1})(5k) = (f-g^{-1})(5)$$

$$= f(5) - g^{-1}(5) \quad ***$$

$$= 1-(-18) = 19$$

* $f^{-1}(-1) = 3(-1)^3 + 2 = -3+2 = -1$

** $g(-1) = \dfrac{13-4(-1)}{17} = 1$

*** **หา f(5)**

$5 = 3x^3 + 2$

$3 = 3x^3$

$x^3 = 1 \rightarrow x = 1 \quad \therefore \ f(5) = 1$

หา $\mathbf{g^{-1}(5)}$

$5 = \dfrac{13-4x}{17}$

$x = -18 \quad \therefore \ g^{-1}(5) = -18$

43. <u>**ตอบ**</u> 3

สมมติให้ลดค่าเช่าลง x บาทต่อเดือน โดย 50 หาร x ลงตัว จะได้ว่า

ค่าเช่าคือ $2,000 - x$ บาทต่อเดือน และจะมีจำนวนผู้เช่า $20 + 2 \cdot \frac{x}{50}$

เมื่อให้ y คือรายรับทั้งหมด จะได้ว่า

$$y = (2,000 - x)\left(20 + 2 \cdot \frac{x}{50}\right)$$

$$= -\frac{2}{50}x^2 + 60x + 40,000$$

ค่า x ที่ทำให้ y สูงสุด $= \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2\left(-\frac{2}{50}\right)} = 750$ (50 หาร 750 ลงตัว)

แสดงว่าควรคิดค่าเช่า $2,000 - 750 = 1,250$ บาท

ซึ่งจะมีผู้เช่าจำนวน $20 + 2 \cdot \frac{750}{50} = 50$ ห้อง (เต็มพอดี)

44. <u>**ตอบ**</u> 4

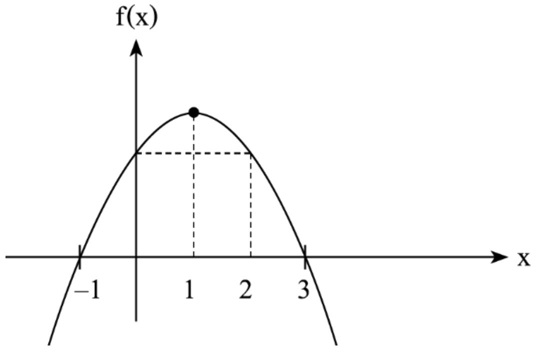
จาก $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ——(1)

$$= -(x^2 - 2x - 3)$$

$$= -(x+1)(x-3)$$

โดยเมื่อ $f(x) = 0$ จะได้ $x = -1, 3$ จะได้ว่า จุดตัดแกน x คือ $(-1, 0)$, $(3, 0)$

และวาดได้กราฟพาราโบลาดังรูป



พิจารณา ก. เราสามารถหา x ที่ทำให้ $f(x)$ สูงสุดได้โดย $x = \frac{-1+3}{2} = 1$

เพราะค่า x ของจุดยอดจะอยู่กึ่งกลางระหว่างค่า x ของจุดตัดแกน x ทั้ง 2

หรือจากสูตร $x = \frac{-b}{2a}$ โดยจาก (1) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$\therefore \quad x = \frac{-2}{2(-1)} = 1$ ดังนั้น ก. ผิด

พิจารณา ข. จาก ก. แทน $x = 1$ ได้

$y_{max} = f(1) = 3 + 2(1) - 1^2 = 4$

ดังนั้น ข. ถูก

พิจารณา ค. จากกราฟพบว่า ที่ $x = 2$ จะให้ค่า y เท่ากับที่ $x = 0$

ดังนั้น ค. ถูก

พิจารณา ง. จากกราฟพบว่า ที่ $x = 3$ จะได้ค่า $y = 0$

แสดงว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที ลูกบอลจะตกถึงพื้นดิน

ดังนั้น ง. ถูก

จึงถูก 3 ข้อความ คือ ข. ค. และ ง.

45. <u>ตอบ</u> 1

พิจารณา (ก) $(p \vee q) \rightarrow s \equiv F$

F

T F

$p \vee q \equiv T$ $s \equiv F$

พิจารณา (ข) $(q \rightarrow r) \leftrightarrow s \equiv T$

T

F F

T F

$q \equiv T$ $r \equiv F$

พิจารณา (ค) $\sim p \vee s \equiv \sim p$

F

$q \wedge (r \vee s) \equiv F$

F F

F

$\therefore \sim p \equiv F$ ได้ $p \equiv T$

พิจารณาทั้ง 5 คำตอบพบว่า มีเพียงคำตอบที่ 1 ที่จริง

โดย $\sim (p \leftrightarrow q) \rightarrow r \equiv T$

T T F

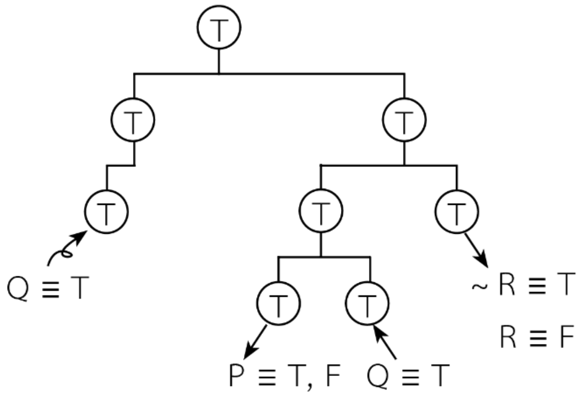
T

F

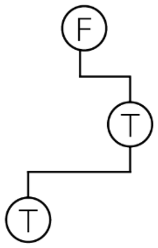
46. **<u>ตอบ</u>** 3

$$\underbrace{(P \vee \sim P)}_{T} \wedge \sim Q \equiv F \rightarrow \sim Q \equiv F \rightarrow Q \equiv T$$

$$(Q \vee P) \longrightarrow ((P \longrightarrow Q) \wedge \sim R) \equiv T$$

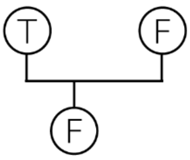


พิจารณา (ก) $(\sim P \longrightarrow \sim Q) \longrightarrow (R \longrightarrow P)$



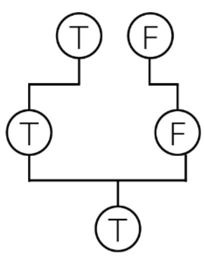
(ก) ผิด

พิจารณา (ข) $\sim R \longleftrightarrow \underbrace{(P \wedge \sim P)}$



(ข) ถูก

พิจารณา (ค) $(\sim P \longrightarrow Q) \vee (R \wedge P)$

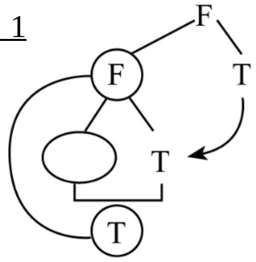


(ค) ถูก

47. **<u>ตอบ</u>** 2

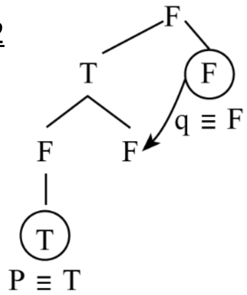
ข้อความ (ก) $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow q$ $\qquad\qquad$ $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow q$

<u>กรณีที่ 1</u>

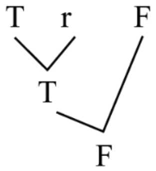


ขัดแย้งกัน กรณีนี้เกิดขึ้นไม่ได้

<u>กรณีที่ 2</u>



จากกรณีที่ 2 จะได้ว่า $[(p \vee r) \rightarrow q]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ



ดังนั้น $\underbrace{[(p \vee r) \rightarrow q]}_{F} \wedge [q \rightarrow (p \wedge r)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$\therefore$ ข้อความ (ก) ผิด

ข้อความ (ข) $p \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$

$\equiv \sim p \vee (\sim p \vee (q \vee r))$

$\equiv \sim p \vee \sim p \vee q \vee r$

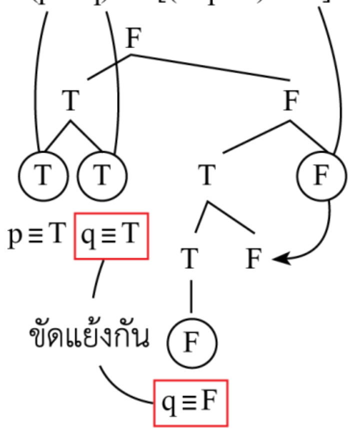
$\equiv (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$

$\equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

$\equiv (p \rightarrow q) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$

$\therefore$ ข้อความ (ข) ถูกต้อง

ข้อความ (ค) $(p \wedge q) \rightarrow [(\sim q \vee r) \rightarrow r]$



ดังนั้น $(p \wedge q) \rightarrow [(\sim q \vee r) \rightarrow r]$ เป็นสัจนิรันดร์ $\therefore$ ข้อความ (ค) ถูกต้อง

48. <u>**ตอบ**</u> 1

เมื่อ $\mathcal{U} = (0, 1]$

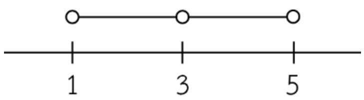
พิจารณา (ก) $\dfrac{1}{|x-3|} > \dfrac{1}{2}$, $x \neq 3$

$$2 > |x-3|$$

$$|x-3| < 2$$

$$-2 < x-3 < 2$$

บวก 3 $1 < x < 5$



พบว่าไม่มี x ใดใน $\mathcal{U} = (0, 1]$ ที่อยู่ในช่วงคำตอบ

$$\therefore \quad \exists x\left[\frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{2}\right] \equiv F$$

$$\underbrace{\exists x\left[\frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{2}\right]}_{F} \rightarrow \forall x\left[|x-3| < \frac{1}{4}\right] \equiv T \qquad \therefore \text{(ก) ถูก}$$

พิจารณา (ข) $|x+5| = |x|+5$

$|x|+|5| = |x+5|$

จาก $|a|+|b| = |a+b|$ เมื่อ $ab \ge 0$

$\therefore$ $(x)(5) \ge 0 \rightarrow x \ge 0$

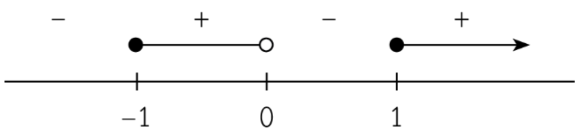
เราพบว่า $\mathcal{U} \subset \{x/x \ge 0\}$

$\therefore$ $\forall x\big[|x+5| = |x|+5\big] \equiv T$ $\therefore$ (ข) ถูก

พิจารณา (ค) $x-\frac{1}{x} \ge 0$

$$\frac{x^2-1}{x} \ge 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \ge 0$$



เราพบว่าใน $\mathcal{U}$ มี x อยู่ 1 ตัว คือ $x = 1$ ที่อยู่ในช่วงคำตอบด้วย

$\therefore$ $\exists x\left[x-\frac{1}{x} \ge 0\right] \equiv T$ $\therefore$ (ค) ผิด

49. <u>**ตอบ**</u> 3

<u>**วิธีที่ 1**</u>

จากโจทย์ $\mathcal{U} = (-2, 2)$

แทน $x = 0$ ใน P(x) จะได้ $\frac{3-0}{0+2} \ge 1$ (T) แสดงว่า $\exists x[P(x)] \equiv T$

แทน $x = 1$ ใน P(x) จะได้ $\frac{3-1}{1+2} \ge 1$ (F) แสดงว่า $\forall x[P(x)] \equiv F$

แทน $x = 0$ ใน Q(x) จะได้ $0^2 > |0-2|$ (F) แสดงว่า $\forall x[Q(x)] \equiv F$

แทน $x = 1.5$ ใน Q(x) จะได้ $1.5^2 > |1.5-2|$ (T) แสดงว่า $\exists x[Q(x)] \equiv T$

(ก) $\underset{(T)}{\exists x[Q(x)]} \rightarrow \underset{(F)}{\forall x[P(x)]}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ $\quad\therefore$ ข้อความ (ก) ผิด

(ข) $\forall x[\sim P(x)] \leftrightarrow \forall x[\sim Q(x)]$

สมมูลกับ $\sim \exists x[P(x)] \leftrightarrow \sim \exists x[Q(x)]$

เนื่องจาก $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แสดงว่า $\sim \exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และ $\exists x[Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แสดงว่า $\sim \exists x[Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x[\underset{(F)}{\sim P(x)}] \leftrightarrow \forall x[\underset{(F)}{\sim Q(x)}]$ มีค่าความจริงเป็นจริง $\quad\therefore$ ข้อความ (ข) ผิด

(ค) เมื่อแทน $x = 1$ ในประโยคเปิดของข้อความ (ค)

จะได้ $P(1) \leftrightarrow Q(1)$

เนื่องจาก $P(1)$ คือ $\frac{3-1}{1+2} \geq 1$ (F)

และ $Q(1)$ คือ $(1)^2 > |1-2|$ (F)

ดังนั้น $P(1) \leftrightarrow Q(1)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

แสดงว่า $\exists x[P(x) \leftrightarrow Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง $\quad\therefore$ ข้อความ (ค) ถูกต้อง

<u>วิธีที่ 2</u>

จากโจทย์ $\mathcal{U} = (-2, 2)$

พิจารณา P(x) $\frac{3-x}{x+2} \geq 1$ สำหรับ $x \in (-2, 2)$ พบว่า $x+2 > 0$

จะได้ $3-x \geq x+2 \rightarrow 2x \leq 1 \rightarrow x \leq \frac{1}{2}$

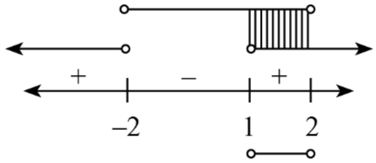
ดังนั้น สำหรับในช่วง $(-2, 2)$ จะมี x ที่เป็นคำตอบของอสมการคือ $x \in (-2, \frac{1}{2}]$

จึงได้ว่า $\exists x[P(x)] \equiv T$ และ $\forall x[P(x)] \equiv F$

พิจารณา Q(x) $x^2 > |x-2|$ สำหรับ $x \in (-2, 2)$ พบว่า $x-2 < 0$

จะได้ว่า $x^2 > -(x-2) \rightarrow x^2 + x - 2 > 0$

$(x+2)(x-1) > 0$



ดังนั้น สำหรับในช่วง $(-2, 2)$ จะมี x ที่เป็นคำตอบของอสมการคือ $x \in (1, 2)$

จึงได้ว่า $\exists x[Q(x)] \equiv T$ และ $\forall x[Q(x)] \equiv F$

ข้อความ (ก) $\underbrace{\exists x[Q(x)]}_{T} \rightarrow \underbrace{\forall x[P(x)]}_{F}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ (ก) ผิด

ข้อความ (ข) $\forall x[\sim P(x)] \leftrightarrow \forall x[\sim Q(x)]$

$\equiv \underbrace{\sim \exists x[P(x)]}_{F} \leftrightarrow \underbrace{\sim \exists x[Q(x)]}_{F}$ มีค่าความจริงเป็นจริง (ข) ผิด

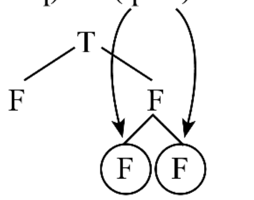
ข้อความ (ค) เนื่องจาก $P(1)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $Q(1)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จึงได้ว่า $\underbrace{P(1)}_{F} \leftrightarrow \underbrace{Q(1)}_{F}$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ดังนั้น $\exists x[P(x) \leftrightarrow Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง (ค) ถูกต้อง

50. <u>**ตอบ**</u> 4

ข้อความ (ก) $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee r)$



$q \equiv F \quad r \equiv F$

พบว่า $\sim p \vee q \equiv \sim p \vee F \equiv \sim p$

และ $(p \wedge \sim q) \rightarrow r \equiv (p \wedge T) \rightarrow F$

$\equiv p \rightarrow F$

$\equiv \sim p$

เพราะเมื่อ $p \equiv T$ แล้ว $p \rightarrow F \equiv F$

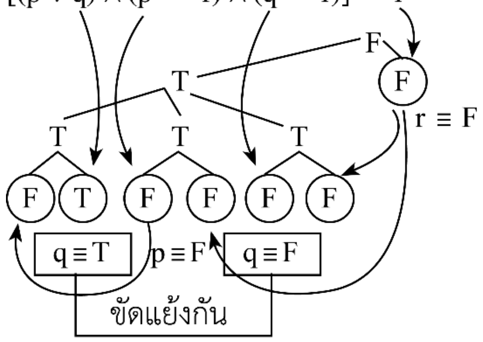
แต่เมื่อ $p \equiv F$ แล้ว $p \rightarrow F \equiv T$

แสดงว่า $p \rightarrow F$ มีค่าความจริงเหมือน $\sim p$

ดังนั้น $\sim p \vee q$ และ $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ มีค่าความจริงเหมือนกัน

$\therefore$ ข้อความ (ก) ถูกต้อง

ข้อความ (ข) $[(p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$



ดังนั้น $[(p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$ เป็นสัจนิรันดร์

$\therefore$ ข้อความ (ข) ถูกต้อง

ข้อความ (ค) $\sim \exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$

$\equiv \forall x[\sim P(x) \vee Q(x)]$

$\equiv \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

$\equiv \forall x[\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)]$

ดังนั้น $\sim \exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)]$

$\therefore$ ข้อความ (ค) ถูกต้อง

****