

โรงเรียนพิบูลวิทยาลัย
คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1
เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

SELF PRACTICE

ข้อ 1 ตอบ 1

$$12(4^x) + 18(9^x) - 35(6^x) = 0$$

$$\frac{12(4^x)}{4^x} + \frac{18(9^x)}{4^x} - \frac{35(6^x)}{4^x} = \frac{0}{4^x}$$

$$12 + 18\left(\frac{9}{4}\right)^x - 35\left(\frac{6}{4}\right)^x = 0$$

$$18\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 35\left(\frac{3}{2}\right)^x + 12 = 0, \text{ ให้ } \left(\frac{3}{2}\right)^x = A$$

จะได้ $18A^2 - 35A + 12 = 0$

$$(9A - 4)(2A - 3) = 0$$

$$A = \frac{4}{9}, \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}, \frac{3}{2} \quad \therefore x = -2, 1$$

$\therefore$ ผลบวกคำตอบ $= -2 + 1 = -1$

ข้อ 2 ตอบ 1

$$x^{\log_5 x^2} = \frac{25}{x^3}$$

$$\log_5 x^{2\log_5 x} = \log_5 \left(\frac{25}{x^3} \right)$$

$$(2\log_5 x)(\log_5 x) = \log_5 25 - \log_5 x^3$$

$$2(\log_5 x)^2 = 2 - 3\log_5 x$$

$$2(\log_5 x)^2 + 3\log_5 x - 2 = 0$$

$$(2\log_5 x - 1)(\log_5 x + 2) = 0$$

$$\log_5 x = \frac{1}{2}, -2$$

$$x = 5^{\frac{1}{2}}, 5^{-2} = \sqrt{5}, \frac{1}{25}$$

ตรวจสอบคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่

$$\therefore \text{ผลคูณคำตอบ} = \frac{\sqrt{5}}{25}$$

ข้อ 3 ตอบ 0.5

$$\text{จาก } (\sqrt{2})^{\log_2 x} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\text{จากโจทย์} \quad \log_2 \left[2^{\sqrt{x}} + (2x)^{\log x} - 4^{\log 8} \right] = \sqrt{x}$$

$$2^{\sqrt{x}} + (2x)^{\log x} - (2^2)^{\log 2^3} = 2^{\sqrt{x}}$$

$$(2x)^{\log x} = 2^{6 \log 2}$$

$$\log(2x)^{\log x} = \log 2^{6 \log 2}$$

$$(\log x)(\log(2x)) = 6 \log 2(\log 2)$$

$$(\log x)(\log 2 + \log x) - 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x)^2 + (\log 2)(\log x) - 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x - 2 \log 2)(\log x + 3 \log 2) = 0$$

$$\log x = 2 \log 2, -3 \log 2$$

$$\log x = \log 2^2, \log 2^{-3}$$

$$\therefore x = 2^2, 2^{-3} = 4, \frac{1}{8}$$

$$\text{ตรวจคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่ ดังนั้น } A = \left\{ 4, \frac{1}{8} \right\}$$

$$\therefore \text{ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดใน } A \text{ คือ } 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

ข้อ 4 ตอบ 5

ให้ $A = 2^a$, $B = \log_2 b$

จากโจทย์ $\frac{2^a - \log_2 b}{2 \log_2 b - 4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{A - B}{2B - 4} = \frac{1}{2}$

$$2A - 2B = 2B - 4 \rightarrow 2A - 4B = -4 \quad \text{---(1)}$$

จาก $\frac{3 + \log_2 B}{2^a + 4} = \frac{\log_2 b}{2^a} \rightarrow \frac{3 + B}{A + 4} = \frac{B}{A} \rightarrow 3A + AB = AB + 4B$

$$3A - 4B = 0 \quad \text{---(2)}$$

(2)-(1) , $A = 4$ แทน A ใน (2) จะได้ $B = 3$

จาก $A = 4 \rightarrow 2^a = 4 \quad \therefore a = 2$

$B = 3 \rightarrow \log_2 b = 3 \quad \therefore b = 2^3 = 8$

$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + 8^2 = 68$

ข้อ 5 ตอบ 2

$$9^x + 6^x - (2^{2x})(2^1) = 0$$

$$9^x + 6^x - 2(4^x) = 0$$

$$\frac{9^x}{4^x} + \frac{6^x}{4^x} - \frac{2(4^x)}{4^x} = \frac{0}{4^x}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2\right] \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right] = 0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = -2, 1$$

ใช้ไม่ได้ เพราะ $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ แน่ๆ

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

ดังนั้น $A = \{0\}$, $B = \{2^0\} = \{1\}$

$\therefore$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน B คือ 1

ข้อ 6 ตอบ 243

$$\frac{(2\log_3 x) - 4}{\log_3 \left(\frac{x}{9}\right)} = \log_3(x^7) - \left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^2 - 8$$

$$\frac{2\log_3 x - 4}{\log_3 x - \log_3 9} = 7\log_3 x - (\log_3 x)^2 - 8$$

ให้ $\log_3 x = A$ จะได้ $\frac{2A - 4}{A - 2} = 7A - A^2 - 8$

$$2\frac{(A - 2)}{A - 2} = 7A - A^2 - 8$$

$$2 = 7A - A^2 - 8 \quad \text{เมื่อ } A \neq 2$$

$$A^2 - 7A + 10 = 0$$

$$(A - 5)(A - 2) = 0$$

$$A = 2, 5 \quad \text{แต่ } A \neq 2$$

ดังนั้น $A = 5$

แทน $A = \log_3 x$, $\log_3 x = 5$

$$\therefore x = 3^5 = 243$$

ข้อ 7 ตอบ 5

$$\frac{4^x + 69}{1 + 2^x + 2} \leq 5$$

$$\frac{2^{2x} + 69}{1 + 2^x \cdot 2^2} \leq 5, \text{ ให้ } A = 2^x$$

จะได้ $\frac{A^2 + 69}{1 + 4A} \leq 5$

$$A^2 + 69 \leq 5(1 + 4A)$$

$$A^2 - 20A + 64 \leq 0$$

$$(A - 16)(A - 4) \leq 0$$

$$(2^x - 16)(2^x - 4) \leq 0$$

ให้ $2^x - 16 = 0 \rightarrow 2^x = 16 \rightarrow x = 4$

$2^x - 4 = 0 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2$

$\therefore$ เซตคำตอบคือ $[2, 4]$



ข้อ 8 ตอบ 10

$$\text{จาก } f(2) = 1 \rightarrow \log_a 2 = 1 \quad \boxed{\therefore a = 2}$$

$$\text{จาก } g(1) = 2 \rightarrow \log_a(1 - b) = 2 \quad \text{แทน } a = 2$$

$$(1 - b) = 2^2$$

$$\boxed{\therefore b = -3}$$

$$\text{จาก } h(1) = 5 \rightarrow (\log_a 1) + c = 5$$

$$0 + c = 5 \quad \boxed{\therefore c = 5}$$

$$\therefore h(13a - 2b) = h((13)(2) - 2(-3)) = h(32)$$

$$= \log_2 32 + 5 = \log_2 2^5 + 5$$

$$= 5 + 5 = 10$$

ข้อ 9 ตอบ 1

จากกราฟของ f และ g เป็นฟังก์ชันเพิ่มทั้งคู่

$$\text{แสดงว่า } \frac{1}{a} > 1 \quad \text{และ} \quad \boxed{b > 1}$$

$$\boxed{a < 1}$$

จากกราฟของ f และ g พบว่า ที่ $x > 0$ $f(x) > g(x)$ ทุกค่า x

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{a} > b \rightarrow \boxed{ab < 1}$$

$$\text{ดังนั้น } 0 < a < 1 \quad \text{และ} \quad 0 < ab < 1$$

ข้อ 10 ตอบ 3

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ ให้เริ่มต้นที่วันที่ 5 พ.ค. ทั้ง A และ B

A : วันที่ 1 มี 1,000 เซลล์ ดังนั้น วันที่ 5 จะมี $1,000 \times 2^4 = 16,000$ เซลล์

B : วันที่ 5 พ.ค. มี 1,000 เซลล์

จากนั้นพิจารณาทีละ 2 วัน

A : เพิ่ม 2 เท่าทุกๆ วัน แสดงว่า ทุกๆ 2 วัน จะมีเพิ่ม 4 เท่า

B : ทุกๆ 2 วัน จะเพิ่ม 5 เท่า

วันที่	5	7	9	11
A	16,000	16,000 (4)	16,000 (4^2)	16,000 (4^3)
B	1,000	1,000 (5)	1,000 (5^2)	1,000 (5^3)

ให้วันที่ B มากกว่า A ครั้งแรกตอนที่ A มี $16,000(4^x)$

B มี $1,000(5^x)$

จะได้สมการ $1,000(5^x) > 16,000(4^x)$

$$5^x > 16(4^x)$$

$$5^x > 4^{x+2}$$

$$\log 5^x > \log 4^{x+2}$$

$$x \log 5 > (x+2) \log 4$$

$$x(1 - \log 2) > (x+2)(2 \log 2)$$

$$x(1 - 0.3) > (x+2)(0.6)$$

$$0.1x > 1.2$$

$$x > 12$$

แสดงว่า B มากกว่า A ครั้งแรก ตอนที่ $x = 13$

นั่นคือ นับจากวันที่ 5 พ.ค. ไปอีก $(13)(2) = 26$ วัน

$\therefore$ ตรงกับวันที่ 31 พ.ค. 63

ข้อ 11 ตอบ 1

B เกิดจากการสลับแถวที่ 1 และ 2 ของ A

ดังนั้น $\det B = -\det A = -10$

$$\therefore \det\left(\frac{1}{5}B\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det B = \frac{1}{125}(-10) = -\frac{2}{25}$$

ข้อ 12 ตอบ

$$\text{ก. } \det B = 3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3(-1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore \det B = -3\det A$ ข้อ ก. ผิด

$$\text{ข. } \det(AC) = \det A \cdot \det C = \det A \cdot (0) = 0$$

($\det C = 0$ เพราะแถวที่ 2 ของ C เป็น 0 ทุกตัว) $\therefore$ ข้อ ข. ถูก

$$\text{ค. } A + C = \begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 3b_2 & c_3 + 3b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A + C) &= \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 3b_2 & c_3 + 3b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - 3R_2 + R_3 \\ &= 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2\det A \end{aligned}$$

$$\text{แต่ } \det A + \det C = \det A + 0 = \det A$$

ดังนั้น $\det(A + C) \neq \det A + \det C$ $\therefore$ ข้อ ค. ผิด

ข้อ 13 ตอบ 5

ให้ x แทนจำนวนผู้สมัครประเภทมินิมารารอน

ให้ y แทนจำนวนผู้สมัครประเภทฮาล์ฟมารารอน

ให้ z แทนจำนวนผู้สมัครประเภทมารารอน

จากโจทย์ ผู้สมัครเข้าร่วมทั้งหมด 1,500 คน

$$\text{จะได้สมการ } x + y + z = 1,500 \quad \text{--- (1)}$$

จากโจทย์ รายได้จากค่าสมัครประเภทฮาล์ฟมารารอนเท่ากับสองเท่าของรายได้

จากค่าสมัครประเภทมินิมารารอน

$$\text{จะได้สมการ } 600y = 2(400x)$$

$$800x - 600y = 0 \quad \text{--- (2)}$$

จากโจทย์ ผู้จัดมีรายได้ทั้งหมด 800,000 บาท

$$\text{จะได้สมการ } 400x + 600y + 800z = 800,000 \quad \text{--- (3)}$$

จากสมการ (1) , (2) และ (3) จะได้เมทริกซ์แต่งเติมดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1,500 \\ 800 & -600 & 0 & 0 \\ 400 & 600 & 800 & 800,000 \end{array} \right]$$

ข้อ 14 ตอบ 1,340

ให้ น้ำดื่มราคาแพ็คเกจละ x บาท

ข้าวสารราคา กิโลกรัมละ y บาท

ปลากระป๋องราคาแพ็คเกจละ z บาท

สมการคือ $2x + 2y + 5z = 800$ — (1)

$4x + 10y + 3z = 1,000$ — (2)

$7x + 3y + z = 660$ — (3)

$(3) \times 3$, $21x + 9y + 3z = 1,980$ — (4)

$(4) - (2)$, $17x - y = 980$ — (5)

$(3) \times 5$, $35x + 15y + 5z = 3,300$ — (6)

$(6) - (1)$, $33x + 13y = 2,500$ — (7)

$(5) \times 13$, $221x - 13y = 12,740$ — (8)

$(7) + (8)$, $254x = 15,240$

$x = 60$

แทน x ใน (5) , $17(60) - y = 980$

$y = 40$

แทน x และ y ใน (3) , $7(60) + 3(40) + z = 660$

$z = 120$

$\therefore 5x + 5y + 7z = 5(60) + 5(40) + 7(120) = 1,340$

ข้อ 15 ตอบ 4

เก้าอี้ : วิเชียรมาศ : ขวามณี = $3 : 2 : 1$

$= 6 : 4 : 2$

ดังนั้น มีเก้าอี้ 6 ตัว , วิเชียรมาศ 4 ตัว , ขวามณี 2 ตัว

สุ่มมา 3 ตัว $n(S) = \binom{12}{3}$ วิธี

หาจำนวนวิธีที่สุ่มแล้วไม่ได้พันธุ์เก้าอี้เลย (เลือกจากวิเชียรมาศและขวามณี)

ทำได้ $\binom{6}{3}$ วิธี

ดังนั้น $P(E') = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{11}$

$\therefore P(\text{ได้พันธุ์เก้าอี้อย่างน้อย 1 ตัว}) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

ข้อ 16 ตอบ 5

จาก 1 – 150 จำนวนคู่ที่หารด้วย 3 ลงตัวก็คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 และ 3 ลงตัว
 นั่นคือ หารด้วย 6 ลงตัวนั่นเอง

ประกอบด้วย 6, 12, 18, 24, 30, , 150 มี 25 จำนวน

$$\text{ดังนั้น } n(S) = \binom{150}{2} \text{ และ } n(E) = \binom{25}{2}$$

$$\therefore P(E) = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{150}{2}} = \frac{\frac{25 \times 24}{2}}{\frac{150 \times 149}{2}} = \frac{4}{149}$$

ข้อ 17 ตอบ 3

ขั้นที่ 1 นำเก้าอี้เปล่า 6 ตัววางก่อน

— — — — —

ขั้นที่ 2 นำเก้าอี้ + คน เข้าแทรกในช่องว่างที่มีอยู่ 7 ช่อง

↑ — ↑ — ↑ — ↑ — ↑ — ↑ — ↑

$$\therefore \text{คนทั้ง 5 จะสามารถนั่งได้ } 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{2!} \text{ วิธี}$$

ข้อ 18 ตอบ 2

Sample space คือ เลือกบัตรสีละ 1 ใบ แล้วสลับหลักกันได้

$$n(s) = \binom{5}{1} \binom{7}{1} \times 2! = 70 \text{ วิธี}$$

เหตุการณ์ที่ได้จำนวน 2 หลักเป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 1 หลักหน่วยเป็นบัตรสีแดงเลขคู่

$$\underbrace{7 \times 2}_{\text{เลขอะไรก็ได้}} = 14 \text{ วิธี}$$

2, 4

กรณีที่ 2 หลักหน่วยเป็นบัตรสีน้ำเงินเลขคู่

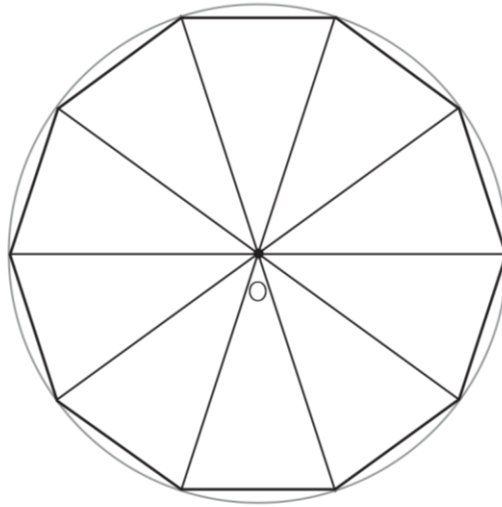
$$\underbrace{5 \times 3}_{\text{เลขอะไรก็ได้}} = 15 \text{ วิธี}$$

2, 4, 6

$$\text{ดังนั้น } n(E) = 14 + 15 = 29$$

$$\therefore P(E) = \frac{29}{70}$$

ข้อ 19 ตอบ 1



จำนวนเส้นเชื่อมจุด 2 จุดใดๆ ทั้งหมด = $\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ เส้น

จำนวนเส้นเชื่อมจุดที่เป็นด้าน = 10 เส้น

จำนวนเส้นเชื่อมจุดที่ผ่านจุดศูนย์กลาง = 5 เส้น

∴ จำนวนส่วนของเส้นตรงที่ไม่เป็นด้าน และไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

จะมี $45 - 10 - 5 = 30$ เส้น

ข้อ 20 ตอบ 5

บริษัทมีพนักงาน 20 คน เป็นฝ่ายผลิต 8 คน , ฝ่ายขาย 7 คน

ดังนั้น ต้องเป็นฝ่ายบริหาร $20 - 8 - 7 = 5$ คน

ซึ่งฝ่ายบริหารเป็นผู้ชาย 3 คน แสดงว่าเป็นผู้หญิง 2 คน

บริษัทมีพนักงานหญิงทั้งหมด 10 คน ทำงานฝ่ายบริหาร 2 คน

ดังนั้น พนักงานหญิงฝ่ายผลิตและฝ่ายขายอย่างละ 4 คน

สรุป

ฝ่าย เพศ	บริหาร	ผลิต	ขาย
ชาย	3	4	3
หญิง	2	4	4

$$n(S) = \binom{20}{4} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5 \times 19 \times 3 \times 17 = 4,845$$

$$n(E) = \binom{4}{3} \binom{4}{1} = 4 \times 4 = 16$$

$$\therefore P(E) = \frac{16}{4,845}$$

ข้อ 21 ตอบ 3

ขั้นที่ 1 : เลือกเลขโดด 3 ตัว ทำได้ $\binom{5}{3} = 10$ วิธี

ขั้นที่ 2 : เลขโดด 3 ตัว สร้างจำนวน 4 หลัก แสดงว่า ต้องมีเลขโดด 1 ตัวถูกใช้ซ้ำ

เลือกเลขที่ถูกใช้ซ้ำ ทำได้ $\binom{3}{1} = 3$ วิธี

ขั้นที่ 3 : นำเลขทั้งหมดสลับที่เพื่อสร้างจำนวน 4 หลัก ทำได้ $\frac{4!}{2!} = 12$ วิธี

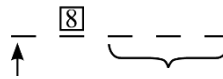
$\therefore$ จำนวน 4 หลักที่สร้างได้ มี $10 \times 3 \times 12 = 360$ จำนวน

ข้อ 22 ตอบ 3

$$n(s) = \binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252 \text{ วิธี}$$

E แทน เหตุการณ์ที่จะได้เลข 8 เป็นจำนวนที่มากเป็นอันดับ 2

แสดงว่า เมื่อเรียงจำนวนที่หยิบได้จากมากไปน้อย



ต้องมากกว่า 8 ต้องน้อยกว่า 8 (เลือกจาก 1 – 7)

(เลือกจาก 9 – 10) ทำได้ $\binom{7}{3}$ วิธี

ทำได้ $\binom{2}{1}$ วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(E) = \binom{2}{1} \binom{7}{3} = 2 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 70 \text{ วิธี}$$

$$\therefore P(E) = \frac{70}{252} = \frac{5}{18}$$

ข้อ 23 ตอบ 3

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(3x - 2)}{3x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(3x - 2)}{(x - 1)(3x + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(3x - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(3x + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{(\sqrt{x} + 1)(3x + 2)} \\
 &= \frac{3 - 2}{(2)(5)} = \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

ข้อ 24 ตอบ 1

f : ต่อเนื่องที่ $x = 0$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{x - x^2} \right)$$

$$\frac{a(0) + (b - a)(0) - b}{0 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1 - x)}$$

$$\therefore b = 1$$

f : ต่อเนื่องที่ $x = 1$

แทนแล้วได้ $\frac{0}{0}$ ใช้ L'Hospital ต่อ

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 + (1 - a)x - 1}{x - 1}$$

$$(1 + 1)^2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2ax + (1 - a)}{1}$$

$$4 = 2a + 1 - a \quad \therefore a = 3$$

ดังนั้น $f(a + b) = f(4)$

ขณะ $x = 4, f(x) = (x + 1)^2$

$$\therefore f(4) = (4 + 1)^2 = 25$$

ข้อ 25 ตอบ 5

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x^2 + a & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2} + c & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \frac{x^3}{3} + ax + d & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

ขณะ $x = 0 \quad f(x) = \frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2} + c$

$$f(0) = 10 \rightarrow \boxed{c = 10}$$

ขณะ $x = 3 \quad f(x) = \frac{x^3}{3} + ax + d$

$$f(3) = 9 \rightarrow 9 + 3a + d = 9 \rightarrow \boxed{d = -3a}$$

f ต่อเนื่องที่ $x = 1$: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\frac{1}{3} + a + d = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2} + 10 \right)$$

$$\frac{1}{3} + a - 3a = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + 10$$

$$\therefore a = -4$$

ข้อ 28 ตอบ 33

$$f(x) = -x^3 - 12x^2 - 45x + c$$

$$f'(x) = -3x^2 - 24x - 45 = 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(x+3)(x+5) = 0 \quad \therefore x = -5, -3$$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์เกิดที่ $x = -3$

$\left. \begin{array}{c} \text{Min} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{c} \text{Max} \end{array} \right\}$

ดังนั้น $f(-3) = 53$

$$-(-3)^3 - 12(-3)^2 - 45(-3) + c = 53$$

$$27 - 108 + 135 + c = 53$$

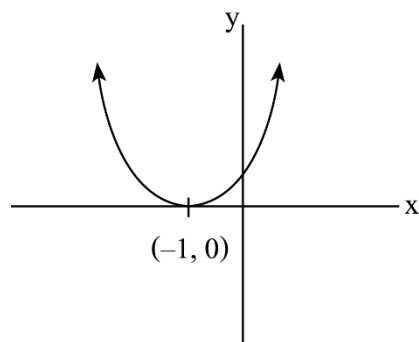
$$\therefore c = -1$$

$$\therefore f(c) = f(-1) = 1 - 12 + 45 - 1 = 33$$

ข้อ 29 ตอบ 4

จากเรนจ์ของ f คือ $[0, \infty)$ แสดงว่า เป็นกราฟพาราโบลาหงายที่มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0

และจาก $f(-1) = 0$ แสดงว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f คือ $(-1, 0)$



ดังนั้น $f'(-1) = 0$

และ $f(-1) = 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \rightarrow f(-1) = a - b + 1 = 0 \quad \text{---(1)}$$

$$f'(x) = 2ax + b \rightarrow f'(-1) = -2a + b = 0 \quad \text{---(2)}$$

$$(1) + (2), -a + 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

แทน $a = 1$ ใน (2) จะได้ $b = 2$

จะได้ $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$$\therefore \int_{-1}^2 f(x) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right|_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) = 9$$

ข้อ 30 ตอบ 81

ให้พาราโบลาที่มีสมการเป็น $f(x) = 17 - x^2$

สมมุติเส้นสัมผัส L สัมผัสพาราโบลาที่ (a, b) จะได้ $f'(a) = -2$

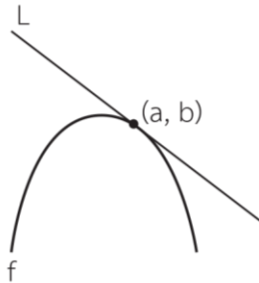
และ $f(a) = b$

$f'(x) = -2x$

$f'(a) = -2a = -2 \quad \therefore a = 1$

$b = f(a) = f(1) = 17 - 1 = 16$

$\therefore$ จุดสัมผัสคือ $(1, 16)$

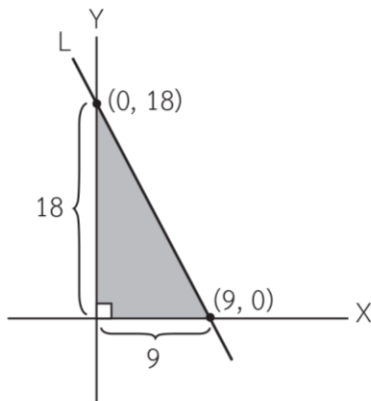


สมการ L คือ $y - 16 = -2(x - 1)$

$y = -2x + 18$

— แทน $x = 0$, $y = 18$

— แทน $y = 0$, $x = 9$



$\therefore$ พื้นที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y และ L คือ $\frac{1}{2}(9)(18)$

$= 81$ ตารางหน่วย

20. ให้จุด A และ B เป็นจุดบนพาราโบลา $9x^2 + 10y = 81$

ถ้าเส้นสัมผัสพาราโบลาที่จุด A และเส้นสัมผัสพาราโบลาที่จุด B ตัดกันที่จุด (0, 9)

แล้วระยะห่างระหว่างจุด A และ B เท่ากับกี่หน่วย

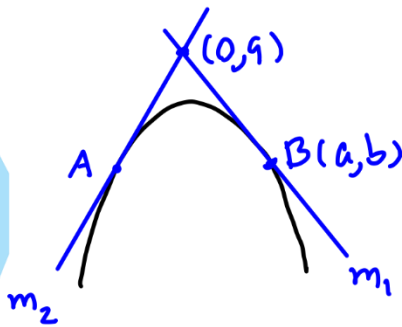
ตอบ 2

จาก $9x^2 + 10y = 81$

$$10y = 81 - 9x^2 \rightarrow$$

เป็นพาราโบลาหงาย

$$y = -\frac{9}{10}x^2 + \frac{81}{10} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{5}x$$



สมมติจุด B คือ (a, b)

m_1 = ดาทสัมผัสเส้นสัมผัสที่ $x = a$

$$= y'(a) = -\frac{9}{5}a$$

และ m_1 = ดาทสัมผัสเส้นตรงที่ผ่าน (a, b) และ $(0, 9)$

$$\text{จะได้ } m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b-9}{a-0}$$

แทน b ด้วย $-\frac{9}{10}a^2 + \frac{81}{10}$

$$m_1 = \frac{-\frac{9}{10}a^2 + \frac{81}{10} - 9}{a} = \frac{-\frac{9}{10}a^2 - \frac{9}{10}}{a}$$

$$\text{จะได้ } -\frac{9}{5}a = \frac{-\frac{9}{10}a^2 - \frac{9}{10}}{a}$$

$$-\frac{9}{5}a^2 = -\frac{9}{10}a^2 - \frac{9}{10}$$

$$\frac{9}{10} = \frac{9}{10}a^2 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = 1, -1$$

แทน $a = 1, -1$ ในสมการพาราโบลา $y = -\frac{9}{10}x^2 + \frac{81}{10}$ จะได้ค่า y เท่ากับ $\frac{72}{10}$

ดังนั้นจุด A และ B คือ $(1, \frac{72}{10})$ และ $(-1, \frac{72}{10})$

$\therefore$ ระยะห่างระหว่าง A และ B คือ 2 หน่วย

แสดงว่า $f'(x)$ เป็นพหุนามกำลัง 1 $f(2)=2$

21. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังสอง ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(2, 2)$ และมีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(1, 3)$

แล้วค่าของ $\int_{-1}^2 f(x) dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

$f'(1)=0$ และ $f(1)=3$

1. 7 2. 6 3. $\frac{16}{3}$ 4. $\frac{14}{3}$ 5. $\frac{8}{3}$

จาก $f'(1)=0$ แสดงว่า $f'(x)$ มี $(x-1)$ เป็นตัวประกอบ

สมมติ $f'(x) = A(x-1) = Ax - A$

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (Ax - A) dx = \frac{Ax^2}{2} - Ax + C$

แทน $f(2)=2 \rightarrow 2A - 2A + C = 2 \rightarrow C = 2$

$f(1)=3 \rightarrow \frac{A}{2} - A + 2 = 3 \rightarrow A = -2$

จะได้ $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

$\therefore \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + 2x + 2) dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \Big|_{-1}^2 = 6$

22. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่ $f(x) + 2f(1-x) = x^2 + 2$

สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ แล้วค่าของ $\int_0^1 f(x) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{2}{9}$

2. $\frac{2}{9}$

3. $\frac{5}{9}$

4. $\frac{7}{9}$

5. $\frac{11}{9}$

ให้ $f(x) + 2f(1-x) = x^2 + 2$ — ①

แทน x ด้วย $1-x$ จะได้ $f(1-x) + 2f(x) = (1-x)^2 + 2$ — ②

② $\times 2$, $2f(1-x) + 4f(x) = 2(1-x)^2 + 4$ — ③

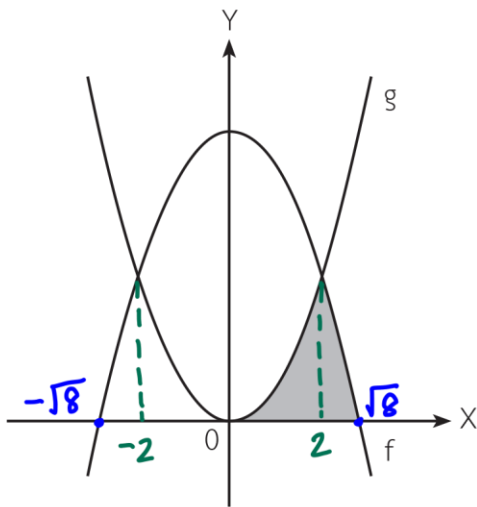
③ - ①, $3f(x) = 2(1-x)^2 - x^2 + 2$

$$f(x) = \frac{2}{3}(1-x)^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx = \left. \frac{x^3}{9} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \right|_0^1 = \frac{7}{9}$$

23. ให้ $f(x) = 8 - x^2$ และ $g(x) = x^2$ สำหรับทุกจำนวนจริง x กราฟของ f และกราฟของ g ตัดกัน
ดังรูป



ส่วนที่แรเงามีพื้นที่เท่ากับกี่ตารางหน่วย

1. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$
2. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$
3. $\frac{8}{3}(4\sqrt{2} + 1)$
4. $\frac{16}{3}(\sqrt{2} + 2)$
5. $\frac{32}{3}(\sqrt{2} - 1)$

แก้จุดตัดแกน x ของ f (แทน $y = 0$)

$$\text{จะได้ } 8 - x^2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{8}, -\sqrt{8}$$

แก้จุดตัดของ f กับ g (ใน $g(x) = f(x)$)

$$\text{จะได้ } x^2 = 8 - x^2$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = 2, -2$$

$$\text{พื้นที่แรเงา} = \int_0^2 g(x) dx + \int_2^{\sqrt{8}} f(x) dx$$

$$= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^{\sqrt{8}} (8 - x^2) dx$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + \left. 8x - \frac{x^3}{3} \right|_2^{\sqrt{8}}$$

$$= \frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{32}{3}$$

$$= \frac{32}{3}(\sqrt{2} - 1) \text{ ตารางหน่วย}$$

24. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

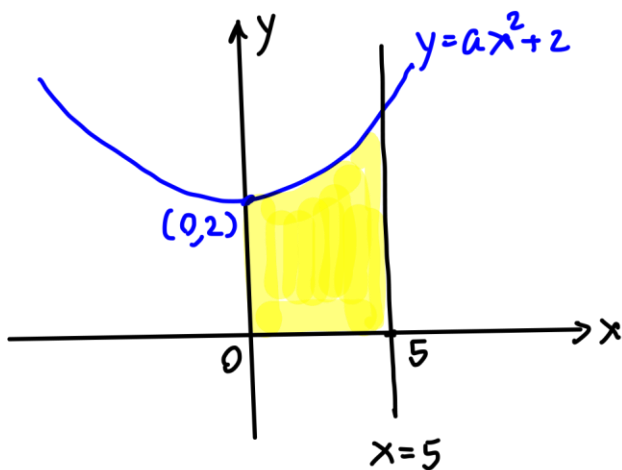
ถ้าบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = ax^2 + 2$ แกน X เส้นตรง $x = 0$

และเส้นตรง $x = 5$ มีพื้นที่เท่ากับ 135 ตารางหน่วย

แล้วความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = ax^2 + 2$ ที่ $x = a$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 18

จาก $y = ax^2 + 2$ เมื่อ $a > 0$ จะเป็นการพหาวาโบลานวาว ๆ ลง ๐๐๐ ที่ $(0, 2)$



$$\text{จากรูป พื้นที่แรว} = \int_0^5 (ax^2 + 2) dx$$

$$135 = \left. \frac{ax^3}{3} + 2x \right|_0^5$$

$$135 = \frac{125a}{3} + 10$$

$$\therefore a = 3$$

จะได้ว่าสมการเส้นโค้งคือ $y = 3x^2 + 2$

$$y' = 6x$$

$\therefore$ ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $x = 3$ คือ $y'(3) = 6(3) = 18$

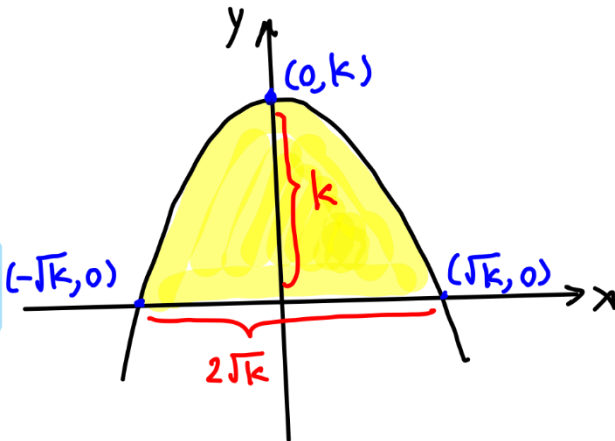
25. ให้ $f(x) = -x^2 + k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x เท่ากับ 36 ตารางหน่วย

แล้ว $f(-1) + f(1)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 16

เชิงกราฟ $y = f(x) = -x^2 + k$



นจุดตัดแกน x โดยแทน $y = 0$

$$0 = -x^2 + k$$

$$x^2 = k \rightarrow x = \sqrt{k}, -\sqrt{k}$$

นจุดยอดของกราฟ โดยแทน $x = 0$

จะได้ $y = k \therefore$ จุดยอดคือ $(0, k)$

โดยที่พื้นที่ที่แรเงา = 36

$$\frac{2}{3}(2\sqrt{k})(k) = 36$$

$$k(\sqrt{k}) = 27 \therefore k = 9$$

จะได้ $f(x) = -x^2 + 9$

$$\therefore f(-1) + f(1) = (-1 + 9) + (-1 + 9) = 16$$
