

ติว PAT1 และ คณิตศาสตร์ 1 วิชาสามัญ
โรงเรียนพินิจวิทยา
เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

ข้อ 3 ตอบ 10

$$\text{จาก } f(2) = 1 \rightarrow \log_a 2 = 1 \quad \boxed{\therefore a = 2}$$

$$\text{จาก } g(1) = 2 \rightarrow \log_a(1 - b) = 2 \quad \text{แทน } a = 2$$

$$(1 - b) = 2^2$$

$$\boxed{\therefore b = -3}$$

$$\text{จาก } h(1) = 5 \rightarrow (\log_a 1) + c = 5$$

$$0 + c = 5 \quad \boxed{\therefore c = 5}$$

$$\therefore h(13a - 2b) = h((13)(2) - 2(-3)) = h(32)$$

$$= \log_2 32 + 5 = \log_2 2^5 + 5$$

$$= 5 + 5 = 10$$

ข้อ 8 ตอบ 1

$$\text{ก. } \det B = 3 \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3(-1) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \det B = -3\det A \quad \text{ข้อ ก. ผิด}$$

$$\text{ข. } \det(AC) = \det A \cdot \det C = \det A \cdot (0) = 0$$

$$(\det C = 0 \text{ เพราะแถวที่ 2 ของ } C \text{ เป็น } 0 \text{ ทุกตัว}) \therefore \text{ข้อ ข. ถูก}$$

$$\text{ค.} \quad A + C = \begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 3b_2 & c_3 + 3b_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A + C) = \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 3b_2 & c_3 + 3b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - 3R_2 + R_3$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2\det A$$

แต่ $\det A + \det C = \det A + 0 = \det A$

ดังนั้น $\det(A + C) \neq \det A + \det C \quad \therefore$ ข้อ ค. ผิด

ข้อ 13 ตอบ 1,340

ให้ น้ำดื่มราคาแพ็คเกจละ x บาท

ข้าวสารราคา กิโลกรัมละ y บาท

ปลากระป๋องราคาแพ็คเกจละ z บาท

$$\text{สมการคือ } 2x + 2y + 5z = 800 \quad \text{--- (1)}$$

$$4x + 10y + 3z = 1,000 \quad \text{--- (2)}$$

$$7x + 3y + z = 660 \quad \text{--- (3)}$$

$$(3) \times 3, \quad 21x + 9y + 3z = 1,980 \quad \text{--- (4)}$$

$$(4) - (2), \quad 17x - y = 980 \quad \text{--- (5)}$$

$$(3) \times 5, \quad 35x + 15y + 5z = 3,300 \quad \text{--- (6)}$$

$$(6) - (1), \quad 33x + 13y = 2,500 \quad \text{--- (7)}$$

$$(5) \times 13, \quad 221x - 13y = 12,740 \quad \text{--- (8)}$$

$$(7) + (8), \quad 254x = 15,240$$

$$\boxed{x = 60}$$

$$\text{แทน } x \text{ ใน (5), } 17(60) - y = 980$$

$$\boxed{y = 40}$$

$$\text{แทน } x \text{ และ } y \text{ ใน (3), } 7(60) + 3(40) + z = 660$$

$$\boxed{z = 120}$$

$$\therefore 5x + 5y + 7z = 5(60) + 5(40) + 7(120) = 1,340$$

ข้อ 17 ตอบ 5

จาก 1 - 150 จำนวนคู่ที่หารด้วย 3 ลงตัวก็คือ จำนวนเต็มที่หารด้วย 2 และ 3 ลงตัว
นั่นคือ หารด้วย 6 ลงตัวนั่นเอง

ประกอบด้วย 6, 12, 18, 24, 30, , 150 มี 25 จำนวน

$$\text{ดังนั้น } n(S) = \binom{150}{2} \text{ และ } n(E) = \binom{25}{2}$$

$$\therefore P(E) = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{150}{2}} = \frac{\frac{25 \times 24}{2}}{\frac{150 \times 149}{2}} = \frac{4}{149}$$

ข้อ 23 ตอบ 2

จาก f ต่อเนื่องที่ $x = -2$

แสดงว่า $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

$$-(-2) + a = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(-\frac{2}{5}x + b \right)$$

$$a + 2 = \frac{4}{5} + b \quad \text{--- (1)}$$

จาก $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ หาค่าได้ แสดงว่า

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(-\frac{2}{5}x + b \right) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 6x + 11)$$

$$\frac{-2}{5}(3) + b = 3^2 - 6(3) + 11$$

$$\therefore b = \frac{16}{5}$$

แทนใน (1) , $a + 2 = \frac{4}{5} + \frac{16}{5} \quad \therefore a = 2$

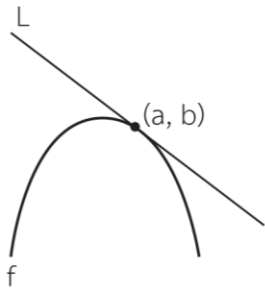
$$\therefore |a + 5b| = 18$$

ข้อ 29 ตอบ 81

ให้พาราโบลาที่มีสมการเป็น $f(x) = 17 - x^2$

สมมติเส้นสัมผัส L สัมผัสพาราโบลาที่ (a, b) จะได้ $f'(a) = -2$

และ $f(a) = b$



$$f'(x) = -2x$$

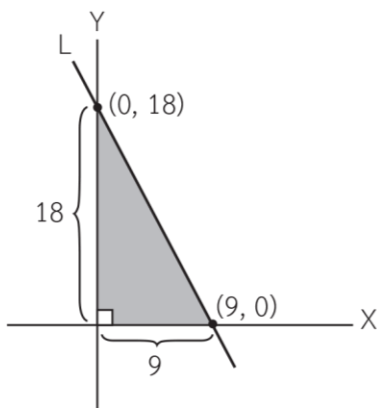
$$f'(a) = -2a = -2 \quad \therefore a = 1$$

$$b = f(a) = f(1) = 17 - 1 = 16$$

$\therefore$ จุดสัมผัสคือ $(1, 16)$

สมการ L คือ $y - 16 = -2(x - 1)$

$$y = -2x + 18 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{แทน } x = 0, y = 18 \\ \text{แทน } y = 0, x = 9 \end{array} \right.$$



$\therefore$ พื้นที่ปิดล้อมด้วยแกน X แกน Y และ L คือ $\frac{1}{2}(9)(18)$
 $= 81$ ตารางหน่วย

ข้อ 30 ตอบ 4

จากโจทย์ $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 แสดงว่า $f'(x)$ มีดีกรี 2 และ $f''(x)$ ดีกรี 1

$$\text{และ } f(1) = -6, f(-1) = 10, f''(1) = 0 \text{ และ } f'(-1) = 0$$

สมมติให้ $f''(x) = A(x-1) = Ax - A$

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \frac{Ax^2}{2} - Ax + C$$

จาก $f'(-1) = 0 \rightarrow \frac{A}{2} + A + C = 0 \rightarrow C = \frac{-3A}{2}$ ———(1)

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{Ax^3}{6} - \frac{Ax^2}{2} + Cx + d$$

จาก $f(1) = -6 \rightarrow \frac{A}{6} - \frac{A}{2} + C + d = -6$ —————(2)

$$f(-1) = 10 \rightarrow \frac{-A}{6} - \frac{A}{2} - C + d = 10$$
 —————(3)

(2)-(3), $\frac{A}{3} + 2C = -16 \rightarrow A + 6C = -48$ —————(4)

แทน (1) ใน (4), $A + 6\left(\frac{-3A}{2}\right) = -48 \rightarrow A = 6$

แทน $A = 6$ ใน (1), $C = -9$

แทน A และ C ใน (2), $d = 5$

จะได้ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = -1, 3$$

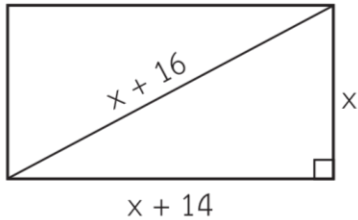
แทนค่า $f(-1) = 10$ และ $f(3) = -22$

ดังนั้น จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(-1, 10)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $(3, -22)$

$\therefore$ ระยะระหว่างจุดทั้งสอง คือ $\sqrt{(-1-3)^2 + (10+22)^2} = 4\sqrt{65}$

เฉลย ADDITIONNAL PROBLEMS

ข้อ 1 ตอบ 3



ให้ด้านกว้าง ยาว x เมตร

จะได้ด้านยาว ยาว $x + 14$ เมตร

และเส้นทแยงมุมยาว $x + 16$ เมตร

จากพิทาโกรัส

$$(x + 16)^2 - (x + 14)^2 = x^2$$

$$[(x + 16) - (x + 14)][(x + 16) + (x + 14)] = x^2$$

$$2[2x + 30] = x^2$$

$$4x + 60 = x^2$$

$$0 = x^2 - 4x - 60$$

$$0 = (x - 10)(x + 6)$$

$$\therefore x = 10, \text{ } \cancel{-6}$$

$$\therefore \text{พื้นที่ห้อง} = 10 \times 24 = 240 \text{ ตารางเมตร}$$

$$\text{จึงเสียค่าแรงในการปรับปรุงพื้นที่} = 240 \times 120$$

$$= 28,800$$

ข้อ 2 ตอบ 3

ให้ x แทนจำนวนกล่องคุกกี้ที่ขายได้ต่อวัน (หน่วยเป็นกล่อง)

y แทนกำไรต่อกล่อง (หน่วยเป็นบาท)

และให้ $y = ax^2 + bx + c$

จากโจทย์ ได้ว่า $x = 20 \rightarrow y = 20$

$$x = 10 \rightarrow y = 0$$

และ $x = 0 \rightarrow y = -40$

ดังนั้น จาก $x = 0 \rightarrow y = -40$

$$-40 = a(0)^2 + b(0) + c \quad \therefore c = -40$$

ได้สมการเป็น $y = ax^2 + bx - 40$

จาก $x = 20 \rightarrow y = 20$

$$20 = a(20)^2 + b(20) - 40$$

$$\div 20, 1 = 20a + b - 2 \rightarrow 20a + b = 3 \quad \text{--- (1)}$$

จาก $x = 10 \rightarrow y = 0$

$$0 = a(10)^2 + b(10) - 40$$

$$\div 10, 0 = 10a + b - 4 \rightarrow 10a + b = 4 \quad \text{--- (2)}$$

(1) - (2), $10a = -1$ ได้ $a = -\frac{1}{10}$ แทนใน (2) ได้ $b = 5$

จาก $y = ax^2 + bx + c, a < 0$

จะมีค่า y สูงสุด เมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$

$$\therefore x = -\frac{5}{2(-\frac{1}{10})} = 25$$

หรือขายวันละ 25 กล่อง จะได้กำไรต่อกล่องมากที่สุด

ข้อ 4 ตอบ 2

ให้ผลิตขนมปังวันละ x ก้อน

และให้กำไรต่อวันเป็น y บาท

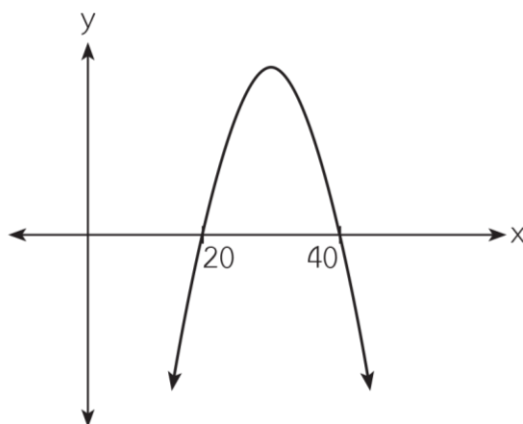
จากโจทย์ กำไร = รายได้ - ต้นทุน

$$\therefore y = (140 - 2x)(x) - [20x + 1,600]$$

$$y = -2x^2 + 120x - 1,600$$

$$y = -2(x^2 - 60x + 800)$$

$$y = -2(x - 20)(x - 40)$$



จากกราฟพบว่า ถ้าผลิตมาขาย 20 ก้อน หรือ 40 ก้อนจะเท่าทุน และถ้าถามว่าผลิต
 อย่างน้อยที่สุดกี่ก้อนจึงกำไร ตอบ 21 ก้อน (เป็นค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้ y เป็นบวก)

ข้อ 5 ตอบ 4

จาก ข้อ 4 ได้ $y = -2(x - 20)(x - 40)$

วันที่ 1 $x = 25, y = -2(25 - 20)(25 - 40)$

$$= -2 \cdot 5 (-15) = 150 \text{ บาท}$$

วันที่ 2 ต้นทุนเพิ่ม 100 บาท ทำให้เมื่อผลิตและขาย x กล่องเท่าเดิม กำไรจะลดลง 100 บาท

$$\text{ได้ } y = -2(x - 20)(x - 40) - 100$$

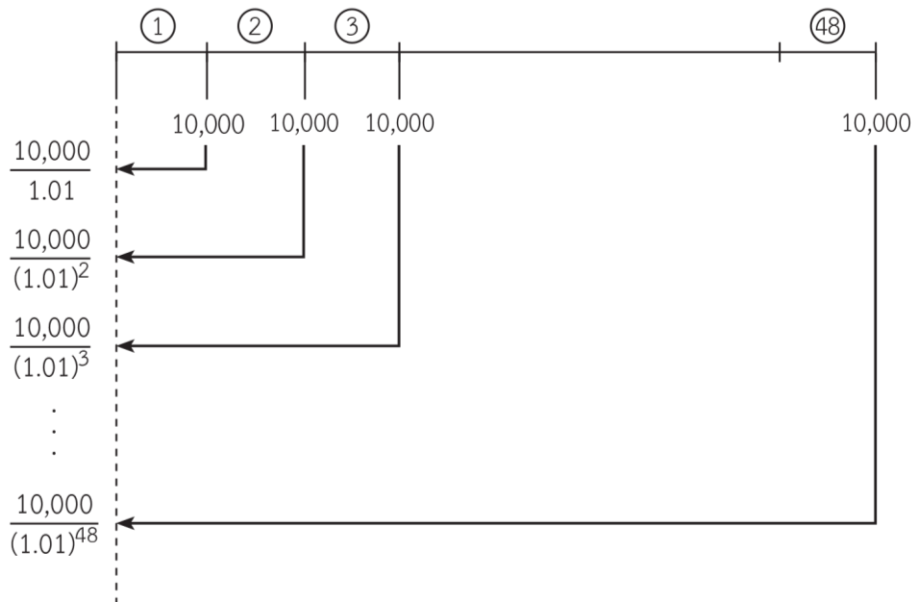
$$x = 30, y = -2(30 - 20)(30 - 40) - 100$$

$$= -2(10)(-10) - 100 = 100 \text{ บาท}$$

$\therefore$ กำไรจะลดลงจากวันที่ 1 50 บาท

ข้อ 6 ตอบ 4

ขั้นที่ 1 รวมเงินผ่อนทั้งหมดโดยเปลี่ยนให้เป็นเงิน ณ ปัจจุบัน (PV)



$$\begin{aligned}
 \text{เงินผ่อน (PV)} &= \frac{10,000}{1.01} + \frac{10,000}{(1.01)^2} + \frac{10,000}{(1.01)^3} + \dots + \frac{10,000}{(1.01)^{48}} \\
 &= \frac{\frac{10,000}{1.01} \left(1 - \left(\frac{1}{1.01} \right)^{48} \right)}{1 - \frac{1}{1.01}} \quad ** \\
 &= \frac{10,000 \left(\frac{1}{1.01} - \left(\frac{1}{1.01} \right)^{49} \right)}{1 - \frac{1}{1.01}} \\
 &= \frac{10,000 \left((1.01)^{-1} - (1.01)^{-49} \right)}{1 - (1.01)^{-1}}
 \end{aligned}$$

** จาก $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$

โดย $a_1 = \frac{10,000}{1.01}$, $r = \frac{1}{1.01}$ และ $n = 48$

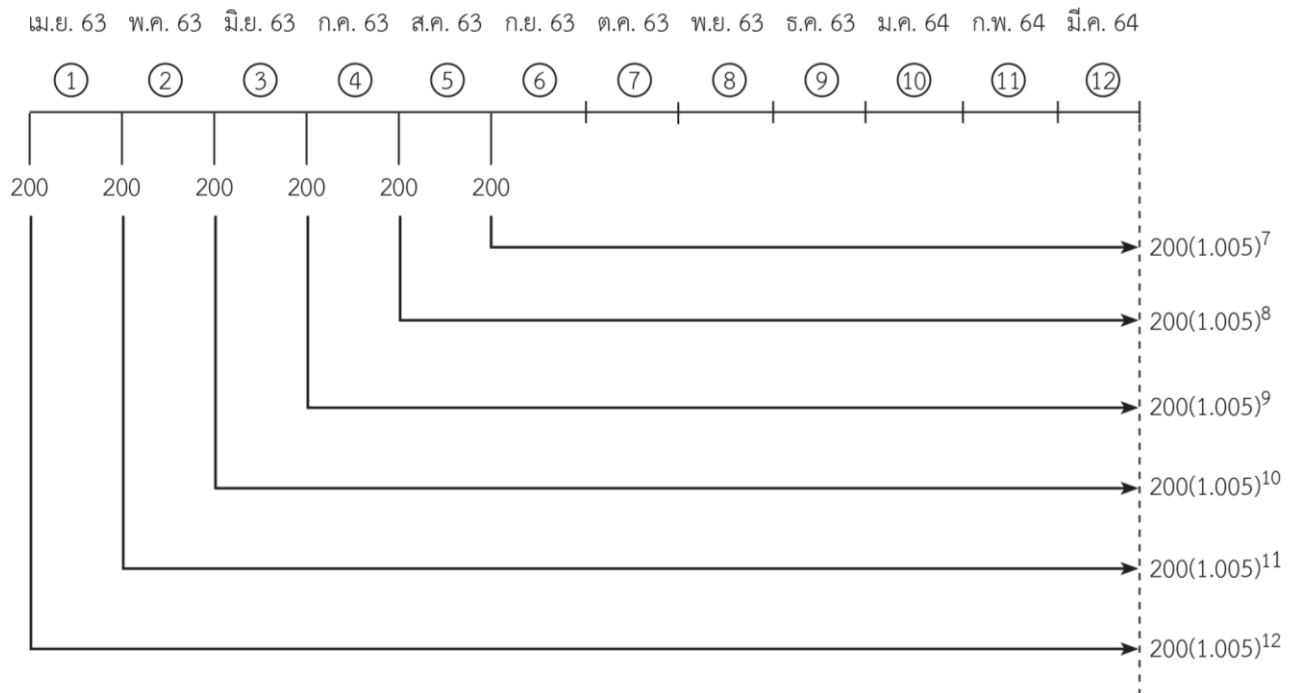
ขั้นที่ 2 จากสมการ

ราคาคอนโด = เงินดาวน์ + เงินผ่อน (PV)

$\therefore$ เงินดาวน์ = ราคาคอนโด - เงินผ่อน (PV)

$$= 600,000 - \frac{10,000 \left((1.01)^{-1} - (1.01)^{-49} \right)}{1 - (1.01)^{-1}}$$

ข้อ 7 ตอบ 1



$$i = \frac{6\%}{12} = 0.5\% \text{ ต่อเดือน}$$

$$\text{จาก } FV = PV(1 + i)^n$$

Ex การฝากเงินครั้งที่ 1 1 เม.ย. 63

$$PV = 200 \text{ บาท}, n = 12$$

$$\text{จะได้ } FV = 200\left(1 + \frac{0.5}{100}\right)^{12} = 200(1.005)^{12}$$

เงินในบัญชีเมื่อรวมทั้งหมด ณ 31 มี.ค. 64

$$= 200(1.005)^7 + 200(1.005)^8 + 200(1.005)^9 + \dots + 200(1.005)^{12}$$

$$= \frac{200(1.005)^7[(1.005)^6 - 1]}{1.005 - 1} \quad **$$

$$= \frac{200[(1.005)^{13} - (1.005)^7]}{1.005 - 1}$$

** จากสูตร $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

โดย $a_1 = 200(1.005)^7, r = 1.005$ และ $n = 6$

ข้อ 8 ตอบ 1

ให้แผนกขายมี x คน

และแผนกบัญชีมี $12 - x$ คน

ทั้ง 2 แผนก โบนัสที่ได้รวมเท่ากันคือ 35,000 บาท

แสดงว่า แผนกขายได้คนละ $\frac{35,000}{x}$ บาท
แผนกบัญชีได้คนละ $\frac{35,000}{12 - x}$ บาท

$$\text{จากโจทย์ } \frac{35,000}{x} - \frac{35,000}{12 - x} = 2,000$$

$$\div 1000, \quad \frac{35}{x} - \frac{35}{12 - x} = 2$$

$$\frac{35(12 - x) - 35x}{(x)(12 - x)} = 2$$

$$420 - 70x = 2(12x - x^2)$$

$$\div 2, \quad 210 - 35x = 12x - x^2$$

$$x^2 - 47x + 210 = 0$$

$$(x - 42)(x - 5) = 0 \quad \therefore x = \cancel{42}, 5 \quad (x = 42 \text{ ไม่ได้ เพราะรวม 2 แผนก ต้องได้ 12 คน})$$

แผนกขายมีจำนวนคนน้อยกว่าแผนกบัญชี $= 12 - 5 = 7$ คน

ข้อ 9 ตอบ 5

$$\text{จาก } A^{-1} = A \rightarrow AA^{-1} = AA \rightarrow I = A^2 \rightarrow A^2 = I$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } a^2 = 1 \quad \text{และ} \quad c^2 = 1 \quad \text{และ} \quad ab + bc = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \boxed{a = 1, -1} \quad \text{และ} \quad \boxed{c = 1, -1} \quad \text{และ} \quad \boxed{b(a+c) = 0}$$

$$\text{พิจารณา } b(a+c) = 0$$

กรณี 1 : ถ้า $\boxed{a+c \neq 0}$ แล้ว $\boxed{b = 0}$

↓ ↓

2 วิธี 1 วิธี $\therefore$ กรณีนี้มี 2×1 วิธี

(1+1, (-1)+(-1))

กรณี 2 : ถ้า $\boxed{a+c = 0}$ แล้ว $\boxed{b \text{ เป็นเลขอะไรก็ได้}}$

↓ ↓

2 วิธี 5 วิธี $\therefore$ กรณีนี้มี 2×5 วิธี

(1+(-1), (-1)+1) (-2, -1, 0, 1, 2)

$$\text{เมื่อรวมทั้ง 2 กรณี จะมี } 2+10 = 12 \text{ วิธี ในการเลือก } a, b, c \in S$$

$$\therefore \text{ จำนวนเมทริกซ์ } A \text{ จะมี } 12 \text{ เมทริกซ์}$$

ข้อ 10 ตอบ 1

(ก) $(0.6)^{-\frac{2}{3}} > (0.6)^0$ เนื่องจาก $0 < 0.6 < 1$ จึงเป็นฟังก์ชันลด

$$-\frac{2}{3} < 0 \text{ เป็นจริง} \quad \therefore \text{ (ก) ถูก}$$

(ข) เนื่องจาก $0 < 0.2 < 1$ จึงเป็นฟังก์ชันลด

$$\text{ถ้า } (0.2)^x > (0.2)^y \text{ แล้ว } x < y \quad \therefore \text{ (ข) ถูก}$$

(ค) $\log_5 0.1 > \log_{0.2} 0.1$

$$\log_5 10^{-1} > \log_{5^{-1}} 10^{-1}$$

$$-\log_5 10 > \log_5 10 \text{ และ } \log_5 10 = \frac{\log 10}{\log 5} > 0 \text{ แน่ๆ} \quad \therefore \text{ (ค) ผิด}$$

ข้อ 11 ตอบ 0.5

$$\text{จาก } (\sqrt{2})^{\log_2 x} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\text{จากโจทย์} \quad \log_2 \left[2^{\sqrt{x}} + (2x)^{\log x} - 4^{\log 8} \right] = \sqrt{x}$$

$$2^{\sqrt{x}} + (2x)^{\log x} - (2^2)^{\log 2^3} = 2^{\sqrt{x}}$$

$$(2x)^{\log x} = 2^{6 \log 2}$$

$$\log(2x)^{\log x} = \log 2^{6 \log 2}$$

$$(\log x)(\log(2x)) = 6 \log 2(\log 2)$$

$$(\log x)(\log 2 + \log x) - 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x)^2 + (\log 2)(\log x) - 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x - 2 \log 2)(\log x + 3 \log 2) = 0$$

$$\log x = 2 \log 2, -3 \log 2$$

$$\log x = \log 2^2, \log 2^{-3}$$

$$\therefore x = 2^2, 2^{-3} = 4, \frac{1}{8}$$

$$\text{ตรวจคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่ ดังนั้น } A = \left\{ 4, \frac{1}{8} \right\}$$

$$\therefore \text{ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดใน } A \text{ คือ } 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

ข้อ 12 ตอบ 6

x, y, z เป็นลำดับเลขคณิต จะได้ว่า $x + z = 2y$

$$2^{x+z} = 2^{2y} \rightarrow 2^x \cdot 2^z = (2^y)^2$$

$$(1+k)(1+k+2+4) = (1+k+2)^2$$

$$(k+1)(k+7) = (k+3)^2$$

$$k^2 + 8k + 7 = k^2 + 6k + 9 \rightarrow k = 1$$

$$2^x = 1+k = 1+1 = 2$$

$$2^y = 2^x + 2 = 2+2 = 4 \rightarrow y = 2$$

$$\therefore x+y+z = (x+z)+y = 2y+y = 3y = 3(2) = 6$$

ข้อ 13 ตอบ 1

$$x^{\log_5 x^2} = \frac{25}{x^3}$$

$$\log_5 x^{2\log_5 x} = \log_5 \left(\frac{25}{x^3} \right)$$

$$(2\log_5 x)(\log_5 x) = \log_5 25 - \log_5 x^3$$

$$2(\log_5 x)^2 = 2 - 3\log_5 x$$

$$2(\log_5 x)^2 + 3\log_5 x - 2 = 0$$

$$(2\log_5 x - 1)(\log_5 x + 2) = 0$$

$$\log_5 x = \frac{1}{2}, -2$$

$$x = 5^{\frac{1}{2}}, 5^{-2} = \sqrt{5}, \frac{1}{25}$$

ตรวจคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่

$$\therefore \text{ผลคูณคำตอบ} = \frac{\sqrt{5}}{25}$$

ข้อ 14 ตอบ 2

ก. $\log_2 a < \log_2 b \rightarrow \boxed{a < b}$

ข. $\frac{2^b}{3^b} > \frac{2^d}{3^d} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^b > \left(\frac{2}{3}\right)^d$

$\therefore \boxed{b < d}$

ค. $3^a 2^a - 3^{2c} > 3^c 2^a - 3^c 3^a$

$$3^a 2^a - 3^{2c} - 3^c 2^a + 3^c 3^a > 0$$

$$2^a (3^a - 3^c) + 3^c (3^a - 3^c) > 0$$

$$(3^a - 3^c)(2^a + 3^c) > 0 \quad \text{และ} \quad 2^a + 3^c > 0 \quad \text{แน่ๆ}$$

$$3^a - 3^c > 0$$

$$3^a > 3^c \rightarrow \boxed{a > c}$$

จาก ก, ข และ ค จะได้ $c < a < b < d$

$\therefore b+d$ มีค่ามากที่สุด

ข้อ 15 ตอบ 4

เก้าแต้ม : วิเชียรมาศ : ขาวมณี = 3 : 2 : 1
= 6 : 4 : 2

ดังนั้น มีเก้าแต้ม 6 ตัว , วิเชียรมาศ 4 ตัว , ขาวมณี 2 ตัว

สุ่มมา 3 ตัว $n(S) = \binom{12}{3}$ วิธี

หาจำนวนวิธีที่สุ่มแล้วไม่ได้พันธุ์เก้าแต้มเลย (เลือกจากวิเชียรมาศและขาวมณี)

ทำได้ $\binom{6}{3}$ วิธี

$$\text{ดังนั้น } P(E') = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{11}$$

$$\therefore P(\text{ได้พันธุ์เก้าแต้มอย่างน้อย 1 ตัว}) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

ข้อ 16 ตอบ 2

ให้ตัวแปรสุ่ม (X) คือกำไรที่ได้จากการเล่นเกมสล็อต 1 ครั้ง

ซึ่ง $x = -90$ หรือ 90 โดย $x = -90$ คือ จ่ายค่าเกมสล็อต 90 บาท แต่ไม่ได้รางวัล

และ $x = 90$ คือจ่ายค่าเกมสล็อต 90 บาท และได้รางวัล 180 บาท จึงได้กำไร $= 180 - 90 = 90$ บาท

$$\begin{aligned}\text{จำนวนวิธีการหยิบสลากพร้อมกัน 2 ใบ จาก 9 ใบ} &= {}^9C_2 \\ &= \frac{9!}{2! \times 7!} \\ &= 36 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

การหยิบสลากพร้อมกัน 2 ใบ จาก 9 ใบ แล้วให้ได้ผลคูณตัวเลขทั้งสองเป็นเลขคู่ ต้องเกิดจากทั้ง 2 ใบเป็นเลขคี่ (คี่ $\times$ คี่ = คี่) โดยเลขคี่มี 5 ใบ คือ 1, 3, 5, 7, 9

$$\begin{aligned}\therefore \text{จำนวนวิธีที่จะได้ผลคูณเป็นเลขคี่} &= {}^5C_2 \\ &= \frac{5!}{2! \times 3!} = 10 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

จากโจทย์ ถ้าผลคูณเป็นเลขคี่ จะไม่ได้รางวัลเลย

$$\text{ดังนั้น จะได้ } P(X = -90) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

สำหรับการหยิบสลากพร้อมกัน 2 ใบ จาก 9 ใบ แล้วให้ได้ผลคูณตัวเลขทั้งสองเป็นเลขคู่ จะมีจำนวนวิธีเท่ากับ จำนวนวิธีทั้งหมด - จำนวนวิธีที่ผลคูณเป็นเลขคี่

$$\begin{aligned}\therefore \text{จำนวนวิธีที่จะได้ผลคูณเป็นเลขคู่} &= 36 - 10 \\ &= 26 \text{ วิธี}\end{aligned}$$

จากโจทย์ ถ้าผลคูณเป็นเลขคู่ จะได้เงินรางวัล 180 บาท

$$\text{ดังนั้น จะได้ } P(X = 90) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

จะได้ตารางแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

x	-90	90
f(x)	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$

$$\mu = \sum_{i=1}^N x_i f(x_i) = -90\left(\frac{5}{18}\right) + 90\left(\frac{13}{18}\right) = 40 \text{ บาท}$$

แสดงว่า โดยเฉลี่ยแล้วจะกำไรครั้งละ 40 บาท

ข้อ 17 ตอบ 0.65

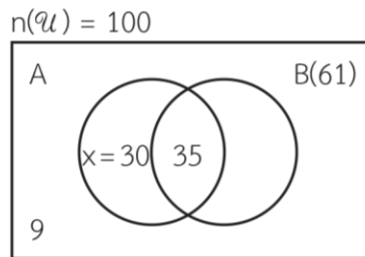
ให้ A คือ เซตของนักเรียนที่ชอบกิจกรรมฐานคณิตศาสตร์

B คือ เซตของนักเรียนที่ชอบกิจกรรมฐานวิทยาศาสตร์

จากโจทย์ ให้ $n(U) = 100$

จะได้ว่า $n(B) = 61$, $n(A \cap B) = 35$ และ $n(A \cup B)' = 9$

จะสามารถวาดแผนภาพได้ดังรูป



ให้ x คือ จำนวนสมาชิกของบริเวณดังแผนภาพ

จากแผนภาพ $n(U) = 9 + x + n(B)$

$$100 = 9 + x + 61$$

$$x = 30$$

ทำให้ $n(A) = 65$

$$\therefore \text{ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะชอบกิจกรรมฐานคณิตศาสตร์} = \frac{65}{100} = 0.65$$

ข้อ 18 ตอบ 5

บริษัทมีพนักงาน 20 คน เป็นฝ่ายผลิต 8 คน , ฝ่ายขาย 7 คน

ดังนั้น ต้องเป็นฝ่ายบริหาร $20 - 8 - 7 = 5$ คน

ซึ่งฝ่ายบริหารเป็นผู้ชาย 3 คน แสดงว่าเป็นผู้หญิง 2 คน

บริษัทมีพนักงานหญิงทั้งหมด 10 คน ทำงานฝ่ายบริหาร 2 คน

ดังนั้น พนักงานหญิงฝ่ายผลิตและฝ่ายขายอย่างละ 4 คน

สรุป

ฝ่าย \ เพศ	ฝ่ายบริหาร	ฝ่ายผลิต	ฝ่ายขาย
ชาย	3	4	3
หญิง	2	4	4

$$n(S) = \binom{20}{4} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5 \times 19 \times 3 \times 17 = 4,845$$

$$n(E) = \binom{4}{3} \binom{4}{1} = 4 \times 4 = 16$$

$$\therefore P(E) = \frac{16}{4,845}$$

ข้อ 19 ตอบ 3

ขั้นที่ 1 : เลือกเลขโดด 3 ตัว ทำได้ $\binom{5}{3} = 10$ วิธี

ขั้นที่ 2 : เลขโดด 3 ตัว สร้างจำนวน 4 หลัก แสดงว่า ต้องมีเลขโดด 1 ตัวถูกใช้ซ้ำ

เลือกเลขที่ถูกใช้ซ้ำ ทำได้ $\binom{3}{1} = 3$ วิธี

ขั้นที่ 3 : นำเลขทั้งหมดสลับที่เพื่อสร้างจำนวน 4 หลัก ทำได้ $\frac{4!}{2!} = 12$ วิธี

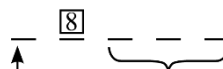
$\therefore$ จำนวน 4 หลักที่สร้างได้ มี $10 \times 3 \times 12 = 360$ จำนวน

ข้อ 20 ตอบ 3

$$n(s) = \binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252 \text{ วิธี}$$

E แทน เหตุการณ์ที่จะได้เลข 8 เป็นจำนวนที่มากเป็นอันดับ 2

แสดงว่า เมื่อเรียงจำนวนที่หยิบได้จากมากไปน้อย



(เลือกจาก 9 – 10) ทำได้ $\binom{7}{3}$ วิธี
 ทำได้ $\binom{2}{1}$ วิธี

$$\text{ดังนั้น } n(E) = \binom{2}{1} \binom{7}{3} = 2 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 70 \text{ วิธี}$$

$$\therefore P(E) = \frac{70}{252} = \frac{5}{18}$$

ข้อ 21 ตอบ 4

เลขโดดที่เป็นเลขคู่ มี 5 ตัว คือ 1, 3, 5, 7, 9

ถ้าจำนวนที่ต้องการอยู่ระหว่าง 1,000 และ 6,000

แสดงว่า หลักพันเป็นเลข 1, 3, 5 เท่านั้น

ส่วนหลักร้อย, หลักสิบ และหลักหน่วย ใช้เลขคู่เลขใดก็ได้

แต่ต้องไม่มีการใช้เลขซ้ำกัน

$\therefore$ จำนวนที่ต้องการมี $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$ จำนวน

ข้อ 22 ตอบ 5

$$P(\text{หยิบได้สีละ 1 ลูก}) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{n}{3n} \times \frac{n}{3n-1} \times \frac{n}{3n-2} \times 3! = \frac{2}{5}$$

$$5n^3 = n(3n-1)(3n-2) \quad \text{และ } n \neq 0$$

$$5n^2 = (3n-1)(3n-2)$$

$$5n^2 = 9n^2 - 9n + 2$$

$$0 = 4n^2 - 9n + 2$$

$$0 = (4n-1)(n-2) \quad \therefore n = \left(\frac{1}{4}\right), 2 \quad \text{ใช้ไม่ได้}$$

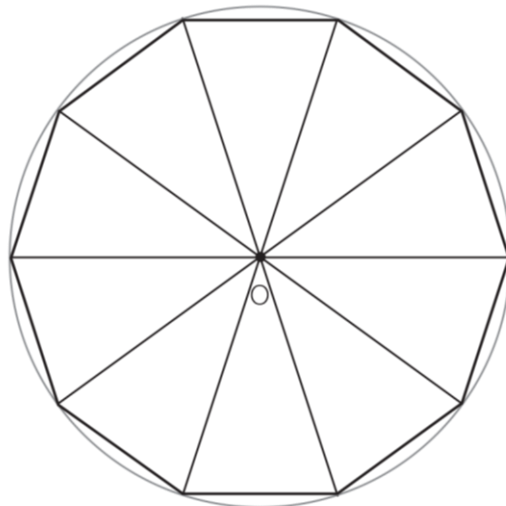
ดังนั้น กล่องใบนี้มีลูกบอล 3 สีๆ ละ 2 ลูก

ทำให้ในการสุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูก จะมีเพียง 2 กรณีเท่านั้น คือ

1. ได้ 3 สีๆ ละ 1 ลูก
2. ได้ 2 สี โดยมี 1 สีที่มี 2 ลูก

$$\therefore P(\text{ได้ 2 สี}) = 1 - P(\text{ได้ 3 สี}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

ข้อ 23 ตอบ 1



$$\text{จำนวนเส้นเชื่อมจุด 2 จุดใดๆ ทั้งหมด} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \text{ เส้น}$$

$$\text{จำนวนเส้นเชื่อมจุดที่เป็นด้าน} = 10 \text{ เส้น}$$

$$\text{จำนวนเส้นเชื่อมจุดที่ผ่านจุดศูนย์กลาง} = 5 \text{ เส้น}$$

$\therefore$ จำนวนส่วนของเส้นตรงที่ไม่เป็นด้าน และไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

$$\text{จะมี } 45 - 10 - 5 = 30 \text{ เส้น}$$

ข้อ 24 ตอบ 3

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(3x-2)}{3x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(3x-2)}{(x-1)(3x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(3x-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(3x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2}{(\sqrt{x}+1)(3x+2)} \\
 &= \frac{3-2}{(2)(5)} = \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

ข้อ 25 ตอบ 33

$$f(x) = -x^3 - 12x^2 - 45x + c$$

$$f'(x) = -3x^2 - 24x - 45 = 0$$

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(x+3)(x+5) = 0 \quad \therefore x = -5, -3$$

Min
Max

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์เกิดที่ $x = -3$

ดังนั้น $f(-3) = 53$

$$-(-3)^3 - 12(-3)^2 - 45(-3) + c = 53$$

$$27 - 108 + 135 + c = 53$$

$$\therefore c = -1$$

$$\therefore f(c) = f(-1) = 1 - 12 + 45 - 1 = 33$$

ข้อ 26 ตอบ 3

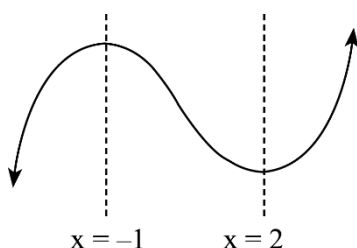
เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{ ทำให้ ค่าวิกฤต } x = -1, 2$$

Max
Min

สัมประสิทธิ์เป็นบวก

เราจะเขียนกราฟคร่าวๆ ได้ดังนี้



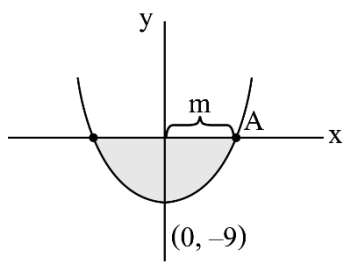
$\therefore$ ก. ถูก

ข. ถูก

ค. ผิด เพราะ $x \in (-1, 2)$ เป็นฟังก์ชันลด

ง. ผิด เพราะ $x \in (-\infty, -1)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ข้อ 27 ตอบ 5



จากสูตร พ.ท.พาราโบลา $= \frac{2}{3} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

$$9 = \frac{2}{3}(2m)(9)$$

$$m = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ จุด A คือ $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

จากสมการมาตรฐานของพาราโบลาหงาย

$$y - k = a(x - h)^2 \text{ มี } (h, k) = (0, -9) \text{ และผ่าน } \left(\frac{3}{4}, 0\right)$$

$$y + 9 = a(x - 0)^2$$

$$\text{แทน } \left(\frac{3}{4}, 0\right) \text{ จะได้ } 0 + 9 = a\left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \therefore a = 16$$

$$\therefore \text{ สมการคือ } y + 9 = 16x^2$$

$$y = 16x^2 - 9$$

ข้อ 28 ตอบ 4

$$f(\sqrt{x} - 1) = x$$

$$\frac{d}{dx} f(\sqrt{x} - 1) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$f'(\sqrt{x} - 1) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x} - 1) = 1$$

$$f'(\sqrt{x} - 1) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 1$$

$$\text{แทน } x = 4 \text{ จะได้ } f'(\sqrt{4} - 1) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\right) = 1$$

$$f'(1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

$$\therefore f'(1) = 4$$

ข้อ 29 ตอบ 5

พิจารณา $x \in (0, 1)$ $f'(x) = -1 \rightarrow$ แปลว่า ความชันของกราฟ $f(x) = -1$
 จะได้กราฟ $f(x)$ เป็นเส้นตรง  ซึ่งต้องเป็นฟังก์ชันลด
 ดังนั้น ข้อ 5 ไม่ถูกต้องแน่ๆ

พิจารณา $x \in (1, 2]$ $f'(x) = 1 \rightarrow$ แปลว่า ความชันของกราฟ $f(x) = 1$
 จะได้กราฟ $f(x)$ เป็นเส้นตรง 

และโจทย์บอกว่า f ต่อเนื่องบน $(0, 6)$ แสดงว่า ที่ $x = 1$ ต่อเนื่องแน่ๆ

จึงได้กราฟ $f(x)$ ที่ $x = 1$ เป็นรูปแบบนี้คือ 

ดังนั้น f มีจุดวิกฤตที่ $x = 1$ และเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ $\therefore$ ข้อ 1 ถูก

พิจารณากราฟ f' พบว่า ที่ $x = 4$ $f'(4) = 0$

และ $f'(4^-) < 0$, $f'(4^+) > 0$ คือเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก

ดังนั้นที่ $x = 4$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ $\therefore$ ข้อ 2 ถูก

เนื่องจากในช่วง $[2, 5]$ $f'(x)$ หาค่าได้ทุกจุด และ f ต่อเนื่องในช่วง $(0, 6)$

ดังนั้น ในช่วง $[2, 5]$ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และต่ำสุดสัมบูรณ์ $\therefore$ ข้อ 3 ถูก

บนช่วง $(1, 3)$ $f'(x) > 0$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม $\therefore$ ข้อ 4 ถูก

ข้อ 30 ตอบ 3

จาก $f(x) = \frac{1}{60}x(x^2 - 49)$ หาจุดตัดแกน x

$$0 = \frac{1}{60}x(x-7)(x+7) \quad \therefore x = 0, 7, -7$$

พบว่า กราฟตัดแกน x ที่ $x = -7, 0, 7$

แทน x ด้วย $-x$ จะได้ $f(-x) = \frac{1}{60}(-x)[(-x)^2 - 49] = -\frac{1}{60}x(x^2 - 49)$

จะได้ $f(-x) = -f(x)$

แสดงว่า พื้นที่ปิดล้อมของ $f(x)$ กับแกน x ตั้งแต่ $x = -7$ ถึง $x = 0$

เท่ากับ พื้นที่ปิดล้อมของ $f(x)$ กับแกน x ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง $x = 7$

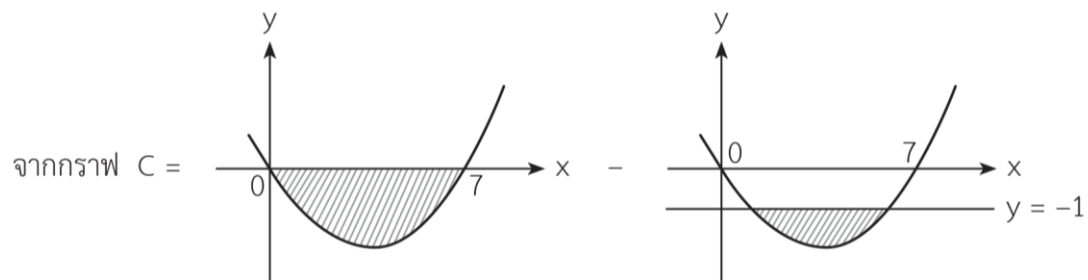
$$\therefore \int_{-7}^0 f(x)dx = -\int_0^7 f(x)dx \quad \therefore \text{ข้อ 1 ถูก}$$

$A =$ พื้นที่ระหว่างกราฟ $y = f(x)$ กับ $y = 1$ ตั้งแต่ $x = p$ ถึง $x = q$

$$\therefore A = \int_p^q [f(x) - 1]dx \quad \therefore \text{ข้อ 2 ถูก}$$

จากกราฟ $B = \int_{-7}^0 f(x)dx - A = \int_{-7}^0 f(x)dx - \int_p^q [f(x) - 1]dx \quad \therefore \text{ข้อ 3 ผิด}$

จากกราฟ $A + B = \int_{-7}^0 f(x)dx = -\int_0^7 f(x)dx \quad \therefore \text{ข้อ 4 ถูก}$

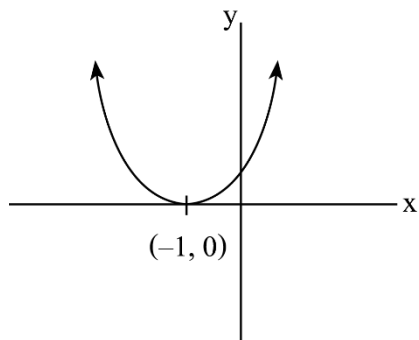


$$\begin{aligned}
 C &= -\int_0^7 f(x)dx - \int_r^s (-1 - f(x))dx \\
 &= -\int_0^7 f(x)dx + \int_r^s (1 + f(x))dx \quad \therefore \text{ข้อ 5 ถูก}
 \end{aligned}$$

ข้อ 31 ตอบ 4

จากเรนจ์ของ f คือ $[0, \infty)$ แสดงว่า เป็นกราฟพาราโบลาหงายที่มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0

และจาก $f(-1) = 0$ แสดงว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f คือ $(-1, 0)$



ดังนั้น $f'(-1) = 0$

และ $f(-1) = 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \rightarrow f(-1) = a - b + 1 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$f'(x) = 2ax + b \rightarrow f'(-1) = -2a + b = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) + (2), -a + 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

แทน $a = 1$ ใน (2) จะได้ $b = 2$

จะได้ $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$$\therefore \int_{-1}^2 f(x) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right|_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) = 9$$

ข้อ 32 ตอบ 3

เส้นโค้งผ่าน $(0, 1)$ และ $(1, 1) \rightarrow f(0) = 1, f(1) = 1$

$$\text{ความชัน} = f'(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f'(0) = 1 \rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$f''(x) = 2ax + b \rightarrow f''(1) = 2 \rightarrow \boxed{2a + b = 2} \quad \text{--- (1)}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + x + d$$

$$f(0) = 1 \rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$f(1) = 1 \rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 + 1 = 1 \rightarrow \boxed{2a + 3b = -6} \quad \text{--- (2)}$$

$$(2) - (1), 2b = -8 \rightarrow \boxed{b = -4}$$

แทน $b = -4$ ใน (1), $a = 3$

$$\text{จะได้ } f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(3x-1)(x-1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}, 1$$

Max
Min

$$\therefore \text{ค่าสูงสุดสัมพัทธ์} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{31}{27}$$

ข้อ 33 ตอบ 2

จาก $y = f(x)$ ผ่าน $(2, 2) \rightarrow f(2) = 2$

จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $(1, 3) \rightarrow f'(1) = 0, f(1) = 3$

จาก $f'(1) = 0$ แสดงว่า $f'(x)$ มี $x-1$ เป็นตัวประกอบ

$$\text{สมมติ } f'(x) = A(x-1) = Ax - A$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{Ax^2}{2} - Ax + C$$

$$f(2) = 2 \rightarrow 2A - 2A + C = 2 \rightarrow \boxed{C = 2}$$

$$f(1) = 3 \rightarrow \frac{A}{2} - A + 2 = 3 \rightarrow \boxed{A = -2}$$

$$\text{จะได้ } f(x) = -x^2 + 2x + 2$$

$$\therefore \int_{-1}^2 f(x)dx = \left. -\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \right|_{-1}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 2 \right) = 6$$

ข้อ 34 ตอบ 76

f : ต่อเนื่องที่ $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a(0) + b(0) + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (4x + c) = c \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \therefore c = 4$$

ขณะ $x = 3$, $f(x) = ax^2 + bx + 4 \rightarrow f'(x) = 2ax + b$

จาก $f'(3) + f(3) = 45 \rightarrow (6a + b) + (9a + 3b + 4) = 45$

$$15a + 4b = 41 \quad \text{--- (1)}$$

จาก $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{2} \rightarrow \int_0^1 (ax^2 + bx + 4) dx = \frac{9}{2}$

$$\left. \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 4x \right|_0^1 = \frac{9}{2} \rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 4 = \frac{9}{2} \rightarrow 2a + 3b = 3 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times 3, 45a + 12b = 123 \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) \times 4, 8a + 12b = 12 \quad \text{--- (4)}$$

$$(3) - (4), 37a = 111 \rightarrow a = 3$$

แทน $a = 3$ ใน (2), $b = -1$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 4 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 4x + 4 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(a) = f(3) = 3(9) - 3 + 4 = 28$$

$$f(b) = f(-1) = -4 + 4 = 0$$

$$f(c) = f(4) = 3(16) - 4 + 4 = 48$$

$$f(a) + f(b) + f(c) = 28 + 0 + 48 = 76$$

ข้อ 35 ตอบ 1

f : ต่อเนื่องที่ $x = 0$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{x - x^2} \right)$$

$$\frac{a(0) + (b - a)(0) - b}{0 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1 - x)}$$

$$\therefore b = 1$$

f : ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แทนแล้วได้ $\frac{0}{0}$ ใช้ L'Hospital ต่อ

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 + (1 - a)x - 1}{x - 1}$$

$$(1 + 1)^2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2ax + (1 - a)}{1}$$

$$4 = 2a + 1 - a \quad \therefore a = 3$$

ดังนั้น $f(a + b) = f(4)$

ขณะ $x = 4$, $f(x) = (x + 1)^2$

$$\therefore f(4) = (4 + 1)^2 = 25$$
