PAT1 & คณิตศาสตร์1 วิชาสามัญ
โรงเรียนพิบูลวิทยาลัย
เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

ข้อ 6 หน้า 7 <u>**ตอบ**</u> 1

$$2\sin a\cos a + 5(\sin a + \cos a) = \frac{1}{25} \rightarrow 1 + 2\sin a\cos a + 5(\sin a + \cos a) = 1 + \frac{1}{25}$$

$$\sin^2 a + 2\sin a\cos a + \cos^2 a + 5(\sin a + \cos a) - \frac{26}{25} = 0$$

$$(\sin a + \cos a)^2 + 5(\sin a + \cos a) - \frac{26}{25} = 0$$

$$25(\sin a + \cos a)^2 + 125(\sin a + \cos a) - 26 = 0$$

$$[5(\sin a + \cos a) - 1][5(\sin a + \cos a) + 26] = 0$$

$$5(\sin a + \cos a) = 1, -26$$

$$(\sin a + \cos a) = \frac{1}{5}, -\frac{26}{5}$$

ใช้ไม่ได้เพราะ $-\sqrt{2} \le \sin a + \cos a \le \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ 125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75\sin a\cos a &= 125(\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a\cos a + \cos^2 a) \\ &\quad + 75\sin a\cos a \\ &= 125\left(\frac{1}{5}\right)(1 - \sin a\cos a) + 75\sin a\cos a \\ &= 25 + 50\sin a\cos a \\ &= 25(1 + 2\sin a\cos a) \\ &= 25\left[\sin^2 a + 2\sin a\cos a + \cos^2 a\right] \\ &= 25(\sin a + \cos a)^2 = 25\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1\end{aligned}$$

ข้อ 8 หน้า 8 <u>**ตอบ**</u> 1,024

$$\frac{a}{bcd} = \frac{\overbrace{(2)(2)\,\ldots\ldots\,(2)}^{10\text{ ตัว}}\ (2\tan 1^\circ)\ (2\tan 2^\circ)\ \ldots\ldots(2\tan 10^\circ)}{(\tan 2^\circ)(\tan 4^\circ)\ \ldots\ (\tan 20^\circ)(1-\tan^2 1^\circ)(1-\tan^2 2^\circ)\ \ldots\ (1-\tan^2 10^\circ)}$$

$$\frac{a}{bcd} = \frac{2^{10}\tan 2^\circ \tan 4^\circ \ldots \tan 20^\circ}{\tan 2^\circ \tan 4^\circ \ldots \tan 20^\circ} = 2^{10} = 1{,}024$$

ข้อ 17 หน้า 12 <u>**ตอบ**</u> 4

$$\tan\left[\frac{\pi}{4}+\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = \tan\left[45^\circ-\sin^{-1}\frac{3}{5}\right] = \tan(45^\circ-37^\circ) = \tan 8^\circ = \frac{1}{7}$$

ข้อ 19 หน้า 13 <u>**ตอบ**</u> 4

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$, นำ $a+b+c$ คูณทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{b+c} = 3 \rightarrow \frac{a+c}{a+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c} = 3$$

$$1+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}+1 = 3 \rightarrow \frac{b(b+c)+a(a+c)}{(a+c)(b+c)} = 1$$

$$b^2+bc+a^2+ac = (a+c)(b+c) \rightarrow b^2+bc+a^2+ac = ab+ac+bc+c^2$$

$a^2+b^2-c^2 = ab$ จากกฎของ Cosine $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{ab}{2ab} = \dfrac{1}{2}$

$C = 60^\circ \quad \therefore \quad \tan C = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

ข้อ 20 หน้า 14 <u>**ตอบ**</u> 2

จากกฎของโปรเจคชัน $b\cos C + c\cos B = a$

$c\cos A + a\cos C = b$

$a\cos B + b\cos A = c$

$$\frac{\cos A}{b\cos C+c\cos B}+\frac{\cos B}{c\cos A+a\cos C}+\frac{\cos C}{a\cos B+b\cos A}$$

$$\frac{1}{a}(\cos A)+\frac{1}{b}(\cos B)+\frac{1}{c}(\cos C)$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2abc}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ข้อ 22 หน้า 16 ตอบ 6,050

$$a_1 + a_3 = 7 \rightarrow 2a_2 = 7 \rightarrow a_2 = \frac{7}{2} \quad \text{——}(1)$$

$$(a_2 + a_8) + (a_4 + a_6) = 74 \rightarrow 2a_5 + 2a_5 = 74 \rightarrow a_5 = \frac{37}{2} \quad \text{——}(2)$$

$$(2)-(1)\ ,\ a_5 - a_2 = \frac{37}{2} - \frac{7}{2} \rightarrow 3d = 15 \rightarrow d = 5$$

$$a_1 = a_2 - d = \frac{7}{2} - 5 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{50} = S_{50} = \frac{50}{2}\left[2a_1 + (50-1)d\right]$$

$$= 25\left[2\left(-\frac{3}{2}\right) + 49(5)\right] = 25(242) = 6,050$$

ข้อ 23 หน้า 17 ตอบ 6

$$2^x = k+1$$

$$2^y = 2^x + 2 = k+1+2 = k+3$$

$$2^z = 2^y + 4 = k+3+4 = k+7$$

x, y, z เป็นลำดับเลขคณิต จะได้ว่า $x+z = 2y \rightarrow 2^{x+z} = 2^{2y}$

$$2^x \cdot 2^z = (2^y)^2 \rightarrow (k+1)(k+7) = (k+3)^2 \rightarrow k^2 + 8k + 7 = k^2 + 6k + 9$$

$k = 1$ จะได้ $2^y = 1+3 = 4 = 2^2 \rightarrow y = 2$

$$\therefore \quad x+y+z = (x+z) + y = 2y+y = 3y = 3(2) = 6$$

ข้อ 24 หน้า 17 ตอบ 4

$$A = 1 + (4+2+1) + (9+6+4) + (16+12+9) + \ldots\ldots + (400+380+361)$$

$$A = 1 + (2^2 + 2\cdot1 + 1^2) + (3^2 + 3\cdot2 + 2^2) + (4^2 + 4\cdot3 + 3^2) + \ldots\ldots + (20^2 + 20\cdot19 + 19^2)$$

$$A = 1 + (2-1)(2^2 + 2\cdot1 + 1^2) + (3-2)(3^2 + 3\cdot2 + 2^2) + (4-3)(4^2 + 4\cdot3 + 3^2) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (20-19)(20^2 + 20\cdot19 + 19^2)$$

$$A = 1 + 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots\ldots + 20^3 - 19^3$$

$$A = 20^3 = 8,000 \qquad \therefore \quad \frac{1}{4}A = 2,000$$

ข้อ 25 หน้า 18 <u>ตอบ</u> 4

$a > b > c$ และ a, b, c เป็นลำดับเลขคณิต แสดงว่า ผลต่างร่วมมีค่าน้อยกว่าศูนย์ $(d < 0)$

จาก $a+b+c = \frac{3}{2} \rightarrow (a+c)+b = \frac{3}{2} \rightarrow 2b+b = \frac{3}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2}$

a^2, b^2, c^2 เป็นลำดับเรขาคณิต $\rightarrow (b^2)^2 = a^2c^2 \rightarrow (ac)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$ac = \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ แต่ $a = b-d = \frac{1}{2}-d$ และ $c = b+d = \frac{1}{2}+d$

กรณีที่ 1 $ac = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}-d\right)\left(\frac{1}{2}+d\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - d^2 = \frac{1}{4} \rightarrow d^2 = 0 \rightarrow d = 0$

ซึ่งใช้ไม่ได้ เพราะ $d < 0$

กรณีที่ 2 $ac = -\frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}-d\right)\left(\frac{1}{2}+d\right) = -\frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - d^2 = -\frac{1}{4} \rightarrow d^2 = \frac{1}{2}$

$d = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ ใช้ไม่ได้เพราะ $d < 0$

$\therefore\ a^2 - c^2 = \left(\frac{1}{2}-d\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+d\right)^2 = \left(\frac{1}{4}-d+d^2\right) - \left(\frac{1}{4}+d+d^2\right) = -2d$

$= -2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

ข้อ 26 หน้า 18 <u>ตอบ</u> 1

$S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 3\}$, $S_3 = \{4, 5, 6\}$, $S_4 = \{7, 8, 9, 10\}$

ให้ a_n เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดใน S_n จะได้ว่า

$a_1 = 1$, $a_2 = 3 = 1+2$, $a_3 = 6 = 1+2+3$, $a_4 = 10 = 1+2+3+4$

$a_{49} = 1+2+3+.....+49 = \frac{49}{2}(49+1) = 1,225$

$a_{50} = 1+2+3+.....+50 = \frac{50}{2}(50+1) = 1,275$

$S_{50} = \{1,226 , 1,227 , 1,228 , \underbrace{................}_{}$ 50 พจน์ $, 1,275\}$

$\therefore$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน $S_{50} = 1,226 + 1,227 + 1,228 + ... + 1,275$

$= \frac{50}{2}(1,226 + 1,275) = 62,525$

ข้อ 28 หน้า 19 **<u>ตอบ</u>** 2

$$9(25a^2+b^2)+25(c^2-3ac) = 15b(3a+c)$$

$$225a^2+9b^2+25c^2-75ac = 45ab+15bc$$

$$(15a)^2+(3b)^2+(5c)^2-75ac-45ab-15bc = 0$$

$2(15a)^2+2(3b)^2+2(5c)^2-150ac-90ab-30bc$, นำ 2 คูณตลอด

$$\left[(15a)^2-2(15a)(3b)+(3b)^2\right]+\left[(15a)^2-2(15a)(5c)+(5c)^2\right]+\left[(3b)^2-2(3b)(5c)+(5c)^2\right] = 0$$

$(15a-3b)^2+(15a-5c)^2+(3b-5c)^2 = 0$ จะได้ว่า

$15a-3b = 0 \rightarrow b = 5a$

$15a-5c = 0 \rightarrow c = 3a$

ดังนั้น b, c, a คือ $5a, 3a, a$ เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต มีผลต่างร่วม $= -2a$

ข้อ 29 หน้า 20 **<u>ตอบ</u>** 3

$S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 3\}$, $S_3 = \{4, 5, 6, 7\}$, $S_4 = \{8, 9, 10, \ldots\ldots, 15\}$

S_1 มีจำนวนสมาชิก $= 1 = 2^{1-1}$ ตัว , S_2 มีจำนวนสมาชิก $= 2 = 2^{2-1}$ ตัว

S_3 มีจำนวนสมาชิก $= 4 = 2^{3-1}$ ตัว , S_4 มีจำนวนสมาชิก $= 8 = 2^{4-1}$ ตัว

จะได้ว่า S_{50} มีจำนวนสมาชิก $= 2^{50-1} = 2^{49}$ ตัว

ให้ a_n เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดใน S_n ดังนั้น

$a_1 = 1 = 2^{1-1}$, $a_2 = 2 = 2^{2-1}$, $a_3 = 4 = 2^{3-1}$, $a_4 = 8 = 2^{4-1}$

จะได้ว่า $a_{50} = 2^{50-1} = 2^{49}$

$S_{50} = \left\{2^{49}, 2^{49}+1 , 2^{49}+2 , \underset{2^{49}\text{ ตัว}}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\right\}$

$\therefore$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน $S_{50} = 2^{49}+2^{49}+1+2^{49}+2+\underset{2^{49}\text{ พจน์}}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

$$= \frac{2^{49}}{2}\left[2(2^{49})+(2^{49}-1)(1)\right] = 2^{48}\left[3(2^{49})-1\right]$$

$$= 3(2^{97})-2^{48}$$

ข้อ 30 หน้า 20 <u>**ตอบ**</u> 3

$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1} \rightarrow a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 2 = 1+2 = 3 = 2^2 - 1$

$a_3 = a_2 + 2^2 = 3+4 = 7 = 2^3 - 1$

$a_4 = a_3 + 2^3 = 7+8 = 15 = 2^4 - 1$

$a_n = 2^n - 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{101} a_n = \sum_{n=1}^{101} (2^n - 1) = \sum_{n=1}^{101} 2^n - \sum_{n=1}^{101} 1$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{101}) - 101$$

$$= \frac{2(2^{101} - 1)}{2-1} - 101 = 2^{102} - 2 - 101 = 2^{102} - 103$$

ข้อ 31 หน้า 21 <u>**ตอบ**</u> 5

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับเรขาคณิตให้อัตราส่วนร่วมเป็น r

$$\sum_{n=1}^{101} a_n = 125 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{101} = 125 \rightarrow \frac{a_1(1-r^{101})}{1-r} = 125$$

$\sum_{n=1}^{101} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{101}}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตมีอัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{1}{r}$

$$= \frac{\frac{1}{a_1}\left[1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{101}\right]}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{a_1}\left[\frac{r^{101} - 1}{r^{101}}\right]}{\frac{r-1}{r}} = \left(\frac{r^{101} - 1}{r-1}\right)\left(\frac{1}{a_1 r^{100}}\right)$$

$$= \frac{a_1(r^{101} - 1)}{r-1}\left(\frac{1}{a_1^2 r^{100}}\right) = \frac{a_1(1-r^{101})}{1-r} \cdot \frac{1}{(a_1 r^{50})^2}$$

$$= (125) \cdot \frac{1}{(a_{51})^2} = (125) \cdot \frac{1}{(25)^2} = \frac{1}{5}$$, โจทย์กำหนด $a_{51} = 25$

ข้อ 32 หน้า 21 <u>ตอบ</u> 2

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...$ เป็นลำดับเรขาคณิตให้อัตราส่วนร่วมเป็น $r = \frac{1}{2}$

จะได้ว่า $r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ และ $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{r} = 2$

พิจารณา $\frac{a_n a_{n+1}}{a_n^2 - a_{n+1}^2} = \frac{\frac{a_n a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}}{\frac{a_n^2}{a_n a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}^2}{a_n a_{n+1}}} = \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}}$

$$= \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \sum_{n=2020}^{2562} \frac{a_n a_{n+1}}{a_n^2 - a_{n+1}^2} = \sum_{n=2020}^{2562} \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)(543) = 362$

ข้อ 33 หน้า 22 <u>ตอบ</u> 1

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ เป็นลำดับเรขาคณิตมีอัตราส่วนร่วม r โดยที่ $|r| < 1$

จากโจทย์ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4 \rightarrow \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = 4$ ——(1)

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{15} = 7 \rightarrow \frac{a_1(1-r^{15})}{1-r} = 7$ ——(2)

$\frac{(2)}{(1)}, \frac{1-r^{15}}{1-r^5} = \frac{7}{4} \rightarrow \frac{1^3 - (r^5)^3}{1-r^5} = \frac{7}{4} \rightarrow \frac{(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r^5} = \frac{7}{4}$

$4r^{10} + 4r^5 + 4 = 7 \rightarrow 4r^{10} + 4r^5 - 3 = 0 \rightarrow (2r^5 - 1)(2r^5 + 3) = 0$

$r^5 = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ ใช้ไม่ได้เพราะ $|r| < 1 \rightarrow |r^5| < 1$

แทน $r^5 = \frac{1}{2}$ ลงใน (1) จะได้ $\frac{a_1}{1-r} = 8$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... = S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = 8$

ข้อ 34 หน้า 22 <u>ตอบ</u> 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{2} \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + ... = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{a_1}{1-r_a} = \frac{3}{2} \quad , \quad a_1 = 1$$

$$\frac{1}{1-r_a} = \frac{3}{2} \rightarrow r_a = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5 \rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + ... = 5 \rightarrow \frac{b_1}{1-r_b} = 5 \quad , \quad b_1 = 7$$

$$\frac{7}{1-r_b} = 5 \rightarrow r_b = -\frac{2}{5}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + ...$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

มี $r = \dfrac{\frac{a_2}{b_2}}{\frac{a_1}{b_1}} = \dfrac{\frac{a_2}{a_1}}{\frac{b_2}{b_1}} = \dfrac{r_a}{r_b}$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{5}{6}$$

$$= \frac{\frac{a_1}{b_1}}{1-r} = \frac{\frac{1}{7}}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{77}$$

ข้อ 35 หน้า 23 <u>ตอบ</u> 4

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\ldots\ldots = \frac{2^1-1}{2^1}+\frac{2^2-1}{2^2}+\frac{2^3-1}{2^3}+\frac{2^4-1}{2^4}+\ldots\ldots+\frac{2^n-1}{2^n}$$

อนุกรมนี้มี $a_n = \frac{2^n-1}{2^n} = \frac{2^n}{2^n}-\frac{1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^n}$

$$a_i = 1-\frac{1}{2^i}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$$

$$= n-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}\right]$$

$$= n-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = n-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$S_n = n-1+\frac{1}{2^n}$$

$$S_{2n} = 2n-1+\frac{1}{2^{2n}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1+\frac{1}{2^n}}{2n-1+\frac{1}{2^{2n}}} = \frac{1}{2}$$

ขอให้น้องทุกคนโชคดีในการสอบ สอบติดในคณะที่ต้องการ

เป็นเด็กดีของคุณพ่อคุณแม่นะครับ

รักและห่วงใยจากใจจริง

พี่ช้าง