

ติว PAT 1 และคณิตศาสตร์ 1 วิชาสามัญ
โรงเรียนพิบูลวิทยาลัย
เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

ข้อ 4 ตอบ 0.5

$$\text{จาก } (\sqrt{2})^{\log_2 x} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\text{จากโจทย์} \quad \log_2 \left[2^{\sqrt{x}} + (2x)^{\log x} - 4^{\log 8} \right] = \sqrt{x}$$

$$2^{\sqrt{x}} + (2x)^{\log x} - (2^2)^{\log 2^3} = 2^{\sqrt{x}}$$

$$(2x)^{\log x} = 2^{6\log 2}$$

$$\log(2x)^{\log x} = \log 2^{6\log 2}$$

$$(\log x)(\log(2x)) = 6\log 2(\log 2)$$

$$(\log x)(\log 2 + \log x) - 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x)^2 + (\log 2)(\log x) - 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x - 2\log 2)(\log x + 3\log 2) = 0$$

$$\log x = 2\log 2, -3\log 2$$

$$\log x = \log 2^2, \log 2^{-3}$$

$$\therefore x = 2^2, 2^{-3} = 4, \frac{1}{8}$$

$$\text{ตรวจคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่ ดังนั้น } A = \left\{ 4, \frac{1}{8} \right\}$$

$$\therefore \text{ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดใน } A \text{ คือ } 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

ข้อ 8 ตอบ 4

$$\text{จาก } AB^t = 2I$$

$$A^{-1}AB^t = A^{-1}2I$$

$$B^t = 2A^{-1} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}B^t$$

$$\text{จาก } A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}B^t \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}((2)(-1) + (1)(5) + (3)(3)) = 6$$

ข้อ 10 ตอบ 2

$$AX = B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -a^2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(แทน $z = 2$)

$$\text{จะได้ } x + y + 2 = -5 \rightarrow x + y = -7 \quad \text{--- (1)}$$

$$x + ay + 2a^2 = -a^2 \rightarrow x + ay = -3a^2 \quad \text{--- (2)}$$

$$x + by + 2b^2 = -5 \rightarrow x + by = -5 - 2b^2 \quad \text{--- (3)}$$

$$(3) - (1), \quad by - y = 2 - 2b^2$$

$$y(b - 1) = 2(1 - b^2)$$

$$y = \frac{2(1-b)(1+b)}{b-1} = -2(1+b) = -2b - 2$$

$$\text{แทน } b = a + 1, \quad y = -2a - 4$$

$$\text{แทน } y = -2a - 4 \text{ ใน (1), } x + (-2a - 4) = -7 \rightarrow x = 2a - 3$$

แทน x และ y ใน (2) $(2a-3)+a(-2a-4) = -3a^2$

$$2a-3-2a^2-4a+3a^2 = 0$$

$$a^2-2a-3 = 0$$

$$(a-3)(a+1) = 0 \rightarrow \boxed{a = 3, -1}$$

กรณี $a = 3$, $a^4 - 4a^3 + 8a + 16 = 13$

กรณี $a = -1$, $a^4 - 4a^3 + 8a + 16 = 13$

ข้อ 17 ตอบ 1

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 25 \\ 18 & b \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แสดงว่า $\det A = 0$

$$\det A = ab - (18)(25) = 0 \rightarrow \therefore ab = (18)(25) = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

ให้ $a = 2^x 3^y 5^z$, $b = 2^p 3^q 5^r$

จะได้ $x+p = 1$, $y+q = 2$, $z+r = 2$ เมื่อ $x, y, z, p, q, r \in \mathbb{I}^+ \cup \{0\}$

พบว่า x เลือกได้ 2 วิธี คือ 0, 1

y เลือกได้ 3 วิธี คือ 0, 1, 2

z เลือกได้ 3 วิธี คือ 0, 1, 2

ส่วน p, q, r จะเลือกได้อย่างละ 1 วิธี เพราะ $ab = 2 \times 3^2 \times 5^2$

ดังนั้นจะเลือก a, b ได้ $2 \times 3 \times 3 = 18$ วิธี

$$\therefore n(S) = 18$$

ข้อ 18 ตอบ 5

จาก $A^{-1} = A \rightarrow AA^{-1} = AA \rightarrow I = A^2 \rightarrow \boxed{A^2 = I}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ $a^2 = 1$ และ $c^2 = 1$ และ $ab+bc = 0$

ดังนั้น $\boxed{a = 1, -1}$ และ $\boxed{c = 1, -1}$ และ $\boxed{b(a+c) = 0}$

พิจารณา $b(a+c) = 0$

กรณี 1 : ถ้า $\boxed{a+c \neq 0}$ แล้ว $\boxed{b = 0}$

↓
2 วิธี

↓
1 วิธี

∴ กรณีนี้มี 2×1 วิธี

(1+1, (-1)+(-1))

กรณี 2 : ถ้า $\boxed{a+c = 0}$ แล้ว $\boxed{b \text{ เป็นเลขอะไรก็ได้}}$

↓
2 วิธี

↓
5 วิธี

∴ กรณีนี้มี 2×5 วิธี

(1+(-1), (-1)+1) (-2, -1, 0, 1, 2)

เมื่อรวมทั้ง 2 กรณี จะมี $2+10 = 12$ วิธี ในการเลือก $a, b, c \in S$

∴ จำนวนเมทริกซ์ A จะมี 12 เมทริกซ์

ข้อ 22 ตอบ 2

จาก $f \circ f^{-1}(x) = x$
 จะได้ $f \circ g(x) = x$
 $\frac{d}{dx} f \circ g(x) = \frac{d}{dx}(x)$
 $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$
 แทน $x = 6$, $f'(\underline{g(6)}) \cdot g'(6) = 1$
 $f'(1) \cdot g'(6) = 1$
 $g'(6) = \frac{1}{\underline{f'(1)}}$
 $\therefore g'(6) = \frac{1}{5}$

หา $g(6)$

$$g(6) = f^{-1}(6)$$

จาก $f(x) = x^3 + 2x + 3$

$$6 = x^3 + 2x + 3$$

$$\therefore x = 1$$

ดังนั้น $g(6) = f^{-1}(6) = 1$

หา $f'(1)$

$$f(x) = x^3 + 2x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$f'(1) = 5$$

ข้อ 23 ตอบ 1

จาก $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2h^3 + (6x+1)h^2 + 2x(3x+1)h}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [2h^2 + (6x+1)h + 2x(3x+1)]$$

$$f'(x) = 2x(3x+1) = 6x^2 + 2x$$

ให้ $f'(x) = 0$ จะได้ $2x(3x+1) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}, 0$
Max Min

จากโจทย์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = 4 $\rightarrow f(0) = 4$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 + 2x) dx = 2x^3 + x^2 + c$$

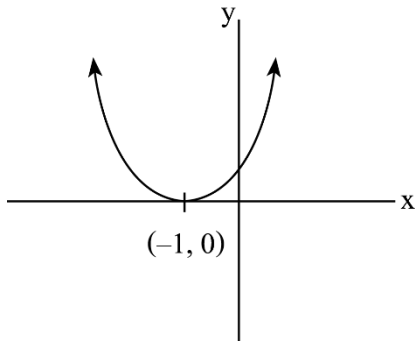
$f(0) = 4 \rightarrow c = 4$ ดังนั้น $f(x) = 2x^3 + x^2 + 4$

$$\therefore f(2) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 24 + 4 = 28$$

ข้อ 27 ตอบ 4

จากเรนจ์ของ f คือ $[0, \infty)$ แสดงว่า เป็นกราฟพาราโบลาหงายที่มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 0

และจาก $f(-1) = 0$ แสดงว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f คือ $(-1, 0)$



ดังนั้น

$$f'(-1) = 0$$

และ

$$f(-1) = 0$$

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \rightarrow f(-1) = a - b + 1 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$f'(x) = 2ax + b \rightarrow f'(-1) = -2a + b = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) + (2), -a + 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

แทน $a = 1$ ใน (2) จะได้ $b = 2$

$$\text{จะได้ } f(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$\therefore \int_{-1}^2 f(x) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 + x \right|_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) = 9$$

ข้อ 29 ตอบ 76

f : ต่อเนื่องที่ $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a(0) + b(0) + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (4x + c) = c \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \therefore c = 4$$

ขณะ $x = 3$, $f(x) = ax^2 + bx + 4 \rightarrow f'(x) = 2ax + b$

จาก $f'(3) + f(3) = 45 \rightarrow (6a + b) + (9a + 3b + 4) = 45$

$$15a + 4b = 41 \quad \text{--- (1)}$$

จาก $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{2} \rightarrow \int_0^1 (ax^2 + bx + 4) dx = \frac{9}{2}$

$$\left. \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 4x \right|_0^1 = \frac{9}{2} \rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 4 = \frac{9}{2} \rightarrow 2a + 3b = 3 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times 3, 45a + 12b = 123 \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) \times 4, 8a + 12b = 12 \quad \text{--- (4)}$$

$$(3) - (4), 37a = 111 \rightarrow a = 3$$

แทน $a = 3$ ใน (2), $b = -1$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 4 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 4x + 4 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f(a) = f(3) = 3(9) - 3 + 4 = 28$$

$$f(b) = f(-1) = -4 + 4 = 0$$

$$f(c) = f(4) = 3(16) - 4 + 4 = 48$$

$$f(a) + f(b) + f(c) = 28 + 0 + 48 = 76$$

ข้อ 30 ตอบ 4

จาก $f'(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1 \rightarrow f''(1) = 0$

จาก $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1 \rightarrow f'(-1) = 0$

สมมติ $f''(x) = A(x-1) = Ax - A$ เมื่อ $A \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \frac{Ax^2}{2} - Ax + c$$

$$f'(-1) = 0 \rightarrow \frac{A}{2} + A + c = 0 \rightarrow \frac{3A}{2} + c = 0 \rightarrow \boxed{c = -\frac{3A}{2}} \quad \text{--- (1)}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{Ax^3}{6} - \frac{Ax^2}{2} + cx + d$$

$$f(1) = -6 \rightarrow \frac{A}{6} - \frac{A}{2} + c + d = -6 \quad \text{--- (2)}$$

$$f(-1) = 10 \rightarrow -\frac{A}{6} - \frac{A}{2} - c + d = 10 \quad \text{--- (3)}$$

$$(2)-(3), \frac{A}{3} + 2c = -16 \rightarrow A + 6c = -48 \quad \text{--- (4)}$$

$$\text{แทน } c = -\frac{3A}{2} \text{ ใน (4), } A + 6\left(-\frac{3A}{2}\right) = -48 \rightarrow \boxed{A = 6}$$

$$\text{แทน } A = 6 \text{ ใน (1), } \boxed{c = -9}$$

$$\text{แทน } A = 6, c = -9 \text{ ใน (3), } \boxed{d = 5}$$

$$\text{จะได้ } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0 \quad \therefore x = \underset{\text{Max}}{-1}, \underset{\text{Min}}{3}$$

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10 \rightarrow \text{จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ } (-1, 10)$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22 \rightarrow \text{จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ } (3, -22)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ระยะระหว่าง } (-1, 10) \text{ กับ } (3, -22) &= \sqrt{(-1-3)^2 + (10+22)^2} \\
 &= \sqrt{4^2 + 32^2} = \sqrt{2^4 + 2^{10}} \\
 &= \sqrt{2^4(1+2^6)} = 4\sqrt{65}
 \end{aligned}$$
