คณิตศาสตร์ ม.ต้น

เฉลย ADDITIONAL PROBLEMS

1. **ตอบ** 4

จากโจทย์

$$xy + x + y = 8$$

$$x(y + 1) + y = 8$$

$$x(y + 1) + (y + 1) = 8 + 1$$

$$(x + 1)(y + 1) = 9 \quad \text{————(1)}$$

ในวิธีการเดียวกัน จะได้ว่า

$$yz + y + z = 15 \rightarrow (y + 1)(z + 1) = 16 \quad \text{————(2)}$$

และ $xz + z + x = 35 \rightarrow (z + 1)(x + 1) = 36$ ————(3)

$(1)\times(2) \div (3)$

$$\frac{(x+1)\,(y+1)\,(z+1)\,(x+1)}{(y+1)\,(z+1)} = \frac{9\times36}{16}$$

$$(x + 1)^2 = \frac{3^2\times6^2}{4^2}$$

$$(x + 1)^2 = \left(\frac{3\times6}{4}\right)^2$$

$$(x + 1)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \rightarrow x + 1 = \frac{9}{2} \rightarrow x = \frac{7}{2}$$

แทนใน x ใน (1) ได้ $\left(\frac{9}{2}\right)(y + 1) = 9 \rightarrow y = 1$

แทนใน x ใน (3) ได้ $(z + 1)\left(\frac{9}{2}\right) = 36 \rightarrow z = 7$

$$\therefore \quad x + y + z + xyz = \frac{7}{2} + 1 + 7 + \frac{7}{2}\cdot 1 \cdot 7 = 36$$

หมายเหตุ จริง ๆ ข้อนี้มีคำตอบอีกชุด เมื่อ

$$(x + 1)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{-9}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad x + 1 = \frac{-9}{2} \rightarrow x = \frac{-11}{2}$$

เมื่อนำไปแทนใน (1) และ (3) จะได้ y และ z ออกมาและเป็นคำตอบอีกชุดที่ x, y, z มีค่าเป็นลบทั้งหมด

2. **ตอบ** 3

$3^1 = \underline{3}$

$3^2 = \underline{9}$

$3^3 = 2\underline{7}$

$3^4 = 8\underline{1}$

} หลักสุดท้ายซ้ำกันทุก ๆ 4 ตัว คือ 3 , 9 , 7 , 1

$\times 3$ ↷ $3^5 = 24\underline{3}$

$3^6 = \ldots\underline{9}$

$\times 3$ ↷ $3^7 = \ldots\underline{7}$

$\times 3$ ↷ $3^8 = \ldots\underline{1}$

. . .

ดังนั้น $3^n =$

- $\ldots\underline{3}, n = 1, 5 \ldots \rightarrow \frac{n}{4}$ เศษ 1
- $\ldots\underline{9}, n = 2, 6 \ldots \rightarrow \frac{n}{4}$ เศษ 2
- $\ldots\underline{7}, n = 3, 7 \ldots \rightarrow \frac{n}{4}$ เศษ 3 **
- $\ldots\underline{1}, n = 4, 8 \ldots \rightarrow \frac{n}{4}$ ลงตัว

$\therefore 3^{15} = ____\underline{7}$ ($\frac{15}{4}$ เศษ 3)

3. **ตอบ** $\frac{37}{69}$

$$a^2 - b^2 = 2553$$

$$(a-b)(a+b) = 3\times23\times37$$

เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก พบว่า $a-b < a+b$ เสมอ

ดังนั้นเกิดได้ 3 กรณี

กรณีที่	$a-b$	$a+b$	$\frac{a-b}{a+b}$
1	3	23×37	$\frac{3}{23\times37}$
2	23	3×37	$\frac{23}{3\times37}$
3	37	3×23	$\frac{37}{3\times23}$ → MAX

$$\therefore \frac{a-b}{a+b}(\text{MAX}) = \frac{37}{3\times23} = \frac{37}{69}$$

4. **ตอบ** 2

ตอนแรก $t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{x}{60} \rightarrow t_{\text{ปกติ}} = \frac{x}{60} - 5$

ตอนหลัง $t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{x}{75} \rightarrow t_{\text{ปกติ}} = \frac{x}{75} + 2$

$$t_{\text{ปกติ}} = t_{\text{ปกติ}}$$

$$\frac{x}{60} - 5 = \frac{x}{75} + 2$$

$$\frac{x}{60} - \frac{x}{75} = 7$$

ค.ร.น. ของ $60, 75 = 300$

$$\frac{5x-4x}{300} = 7$$

$$\frac{x}{300} = 7 \rightarrow x = 2100$$

5. **ตอบ** 1

พิจารณา ก.

นักเรียนรวมชายและหญิงมี 10 คน $(N = 10)$

ค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบคือ 51 คะแนน $(\bar{x} = 51)$

จาก $\Sigma x = N \cdot \bar{x}$

$= 10 \cdot 51$

$= 510$ คะแนน ก. ถูก

พิจารณา ข.

จาก $\bar{x}_{รวม} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1 + N_2}$

ข้อนี้มี 2 กลุ่ม เป็นชายและหญิง

$\therefore \bar{x}_{รวม} = \frac{N_{ช} \cdot \bar{x}_{ช} + N_{ญ} \cdot \bar{x}_{ญ}}{N_{ช} + N_{ญ}}$ ($N_{ช}$, $N_{ญ}$ ทอนเป็นอย่างต่ำได้)

โดย $N_{ช} : N_{ญ} = 6 : 4 = 3 : 2$ (เราจะใช้ $N_{ช} = 3$, $N_{ญ} = 2$)

และจากโจทย์ $\bar{x}_{รวม} = 51$, $\bar{x}_{ช} = 49$

$$51 = \frac{3 \cdot 49 + 2 \cdot \bar{x}_{ญ}}{3+2}$$

$$255 = 147 + 2\bar{x}_{ญ}$$

$$\bar{x}_{ญ} = 54$$ ข. ถูก

6. **ตอบ** 3

การนำข้อมูลทุกตัวลบออกด้วยค่าที่เท่ากัน จะไม่ทำให้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) เปลี่ยน

ดังนั้น จากข้อมูลเดิม $a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+6$

พี่จะลบข้อมูลทุกตัวออก a จะได้ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ จากนั้นนำไปหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

โดย $\bar{x} = \frac{0+1+2+3+4+5+6}{7} = 3$

จากสูตร $SD. = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{(0-3)^2+(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2+(6-3)^2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{9+4+1+0+1+4+9}{7}} = 2$$

7. **ตอบ** 3

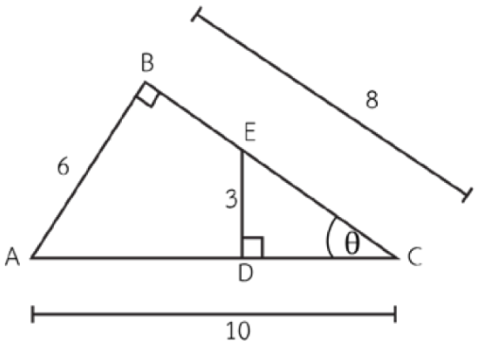
ในสามเหลี่ยมใดๆ

ผลต่างของ	<	ความยาวด้านที่ 3	<	ผลบวกของ
ความยาวด้านที่ 1				ความยาวด้านที่ 1
และด้านที่ 2				และด้านที่ 2
(ด้านยาว – ด้านสั้น)				

$$13-5 < CA < 13+5$$

$$8 < CA < 18$$

8. **ตอบ** 3



พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} \quad \left(\frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}\right)$$

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก CDE

$$\tan\theta = \frac{DE}{DC} \quad \left(\frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}\right)$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DC}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{DC}$$

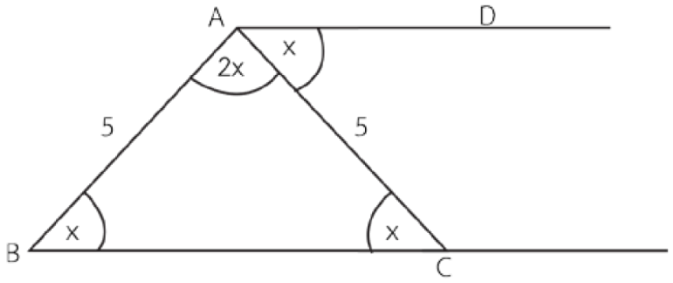
$$\therefore DC = 4 \text{ เซนติเมตร}$$

และ $AD = AC - DC$

$= 10 - 4$

$= 6$ เซนติเมตร

9. **ตอบ** 2

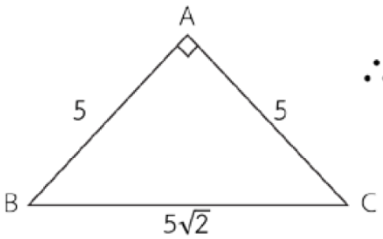


พิจารณาสามเหลี่ยม ABC

มุมภายในรวมกันต้องได้ 180°

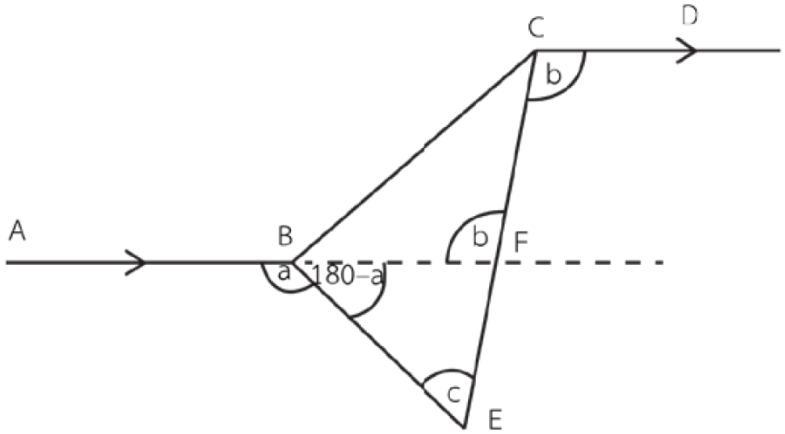
$2x + x + x = 180^\circ \rightarrow 4x = 180^\circ$

แสดงว่า $2x = 90^\circ$ (มุม BAC เป็นมุมฉาก)



$\therefore$ จากปิทาโกรัส $BC = 5\sqrt{2}$

10. **ตอบ** 2



ลากเส้นประต่อจาก $\overline{AB}$ ไปตัดกับ $\overline{CE}$ ที่ F

เราได้ว่า มุม BFC = มุม FCD = b

และมุม FBE = $180^\circ - a$

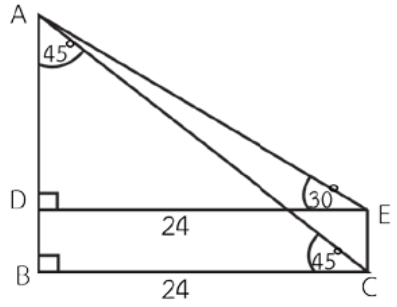
พิจารณา สามเหลี่ยม BEF

มุม $B\hat{F}C$ = มุม FBE + มุม BEF

$b = (180^\circ - a) + c$

$a + b - c = 180^\circ$

11. **ตอบ** 10.16



จาก ΔABC , $AB = BC = 24$

จาก ΔADE , $\frac{AD}{DE} = \tan 30^\circ$

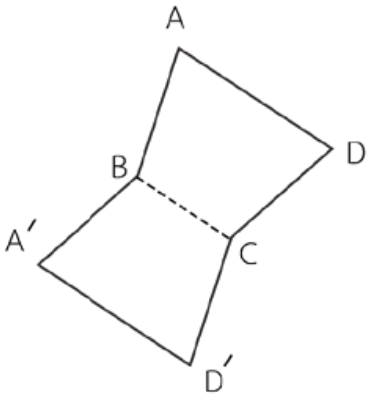
$\frac{AD}{24} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore AD = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$

$AD = 8(1.73) = 13.84$

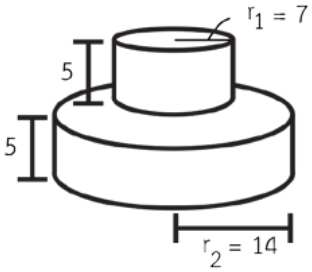
$\therefore BD = AB - AD = 24 - 13.84 = 10.16$

12. **ตอบ** 2



ความยาวรอบรูปจะยาวที่สุด เมื่อเราใช้ด้านสั้นที่สุดเป็นแกนสมมาตร

13. **ตอบ** 4



$$\begin{aligned} V &= \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 h \\ &= \pi h(r_1^2 + r_2^2) \\ &= \tfrac{22}{7}(5)(7^2 + 14^2) \\ &= 3{,}850 \text{ ลบ.ซม.} \end{aligned}$$

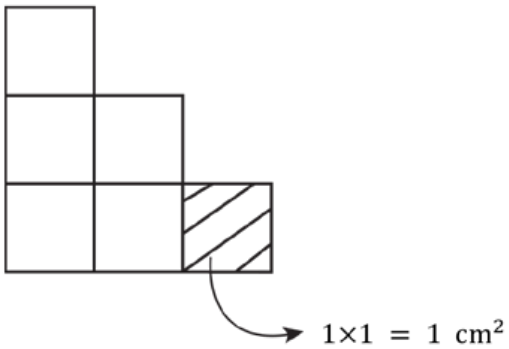
14. **ตอบ** 2

พิจารณาทีละด้าน หน้า – หลัง – ซ้าย – ขวา – บน – ล่าง

จะมีด้านละ $6\ cm^2$

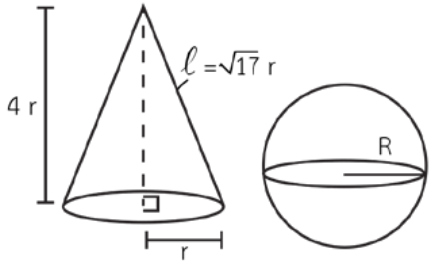
$\therefore$ พ.ท.ผิวรวม $36\ cm^2$

หมายเหตุ



พื้นที่ผิวในแต่ละด้านจะมีจัตุรัส 6 รูป รูปละ $1\ cm^2$ รวมเป็น $6\ cm^2$

15. **ตอบ** 3



$$V_{\text{กรวย}} = V_{\text{ทรงกลม}}$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2(4r) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{r = R}$$

พ.ท.ผิวทรงกลม $-$ พ.ท.ปากกรวย $= 12$

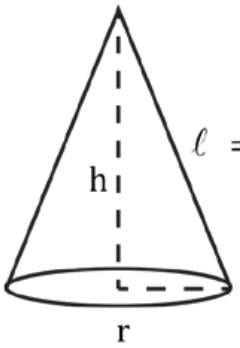
$$4\pi r^2 - \pi r^2 = 12$$

$$r^2 = \frac{4}{\pi}$$

$\therefore$ พ.ท.ผิวข้างกรวย $= \pi r\ell = \pi r(\sqrt{17}r) = \sqrt{17}\pi r^2$

$$= \sqrt{17}\pi\left(\frac{4}{\pi}\right) = 4\sqrt{17}$$

16. **ตอบ** 2



$\ell = \frac{5}{6}$

จากโจทย์ พ.ท.ผิว $= \pi$

$$\pi r\ell + \pi r^2 = \pi$$

$$r\left(\frac{5}{6}\right) + r^2 = 1$$

$$6r^2 + 5r - 6 = 0$$

$$(3r-2)(2r+3) = 0$$

ใช้ไม่ได้

$$R = \frac{2}{3}, \frac{-3}{2}$$

จากทฤษฎีพิทาโกรัส , $r = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, $\ell = \frac{5}{6} \rightarrow h = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

จากโจทย์ $V_{กรวย} = 12 \times V_{ทรงกลม}$, สมมุติทรงกลมมีรัศมี $= R$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 12\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = 48R^3$$

$$R^3 = \frac{1}{9\times 24} \rightarrow R = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ พ.ท.ผิวทรงกลม 12 ลูก $= 12(4\pi R^2) = 48\pi\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi$ ตร.หน่วย

17. **ตอบ** 2

$n(S) = \underline{4} \times \underline{3} = 12$ วิธี

(2) หลักที่สองเหลือ 3 วิธี (ห้ามซ้ำหลักแรก)

(1) หลักแรกเลือกได้ 4 วิธี

$n(E) = \underline{3} \times \underline{3} = 9$ วิธี

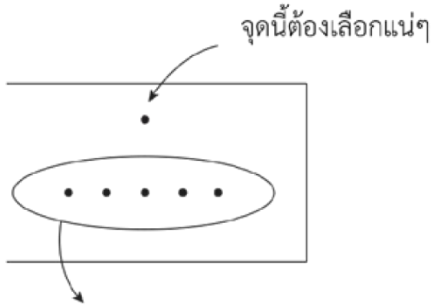
(1) เลขคี่ต้องลงท้ายด้วย 3, 5, 7 ทั้งนั้น

(2) เลือกจากเลข 3 ตัวที่เหลือหลังจากเลือกหลักหน่วย

$\therefore \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{9}{12}$

18. **ตอบ** 4

จะสร้างสามเหลี่ยมต้องเลือกจุด 3 จุดที่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันทั้งหมด

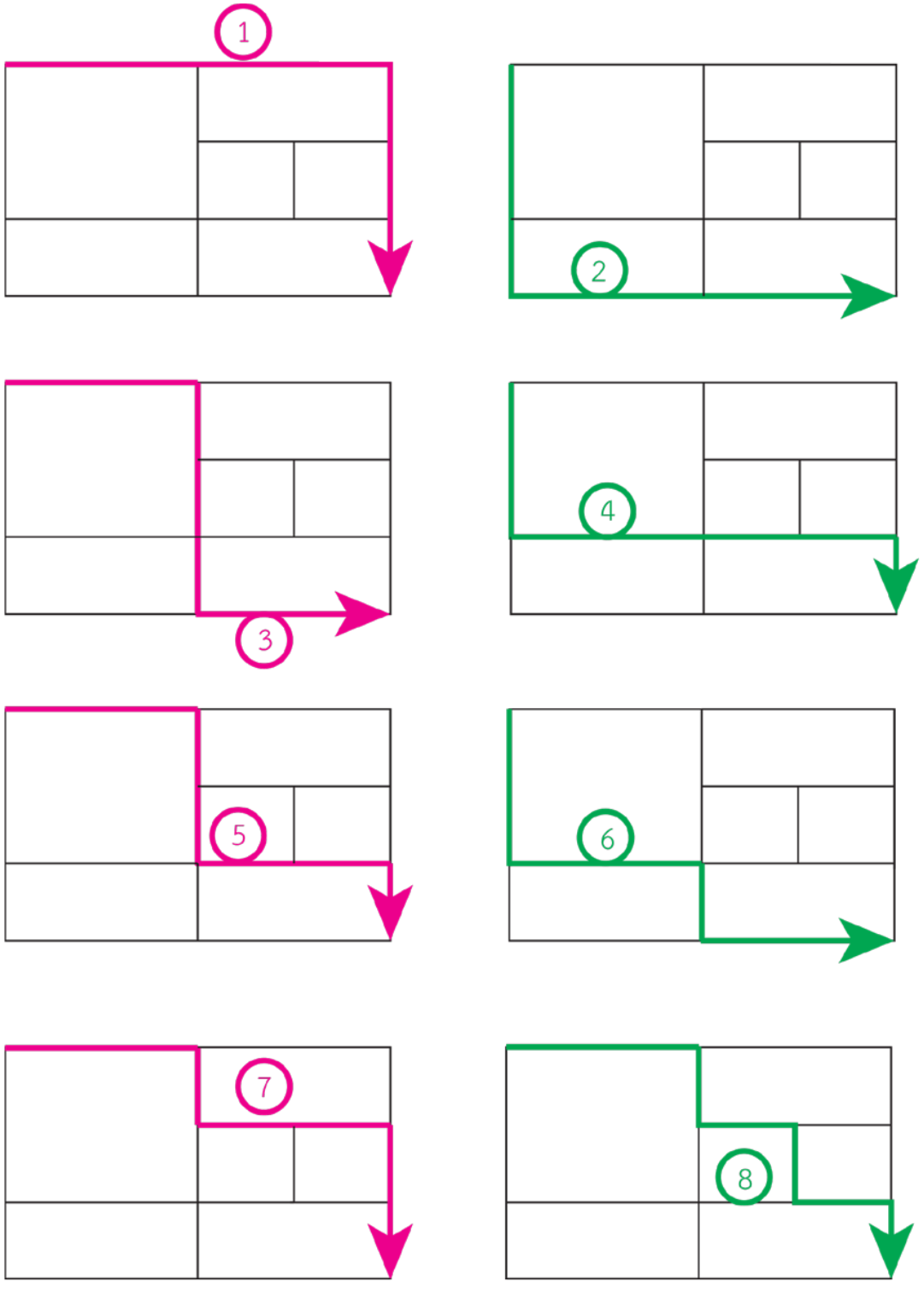


5 จุดนี้เลือก 2 จุด

โดยไล่ไปเป็นคู่ๆ จะได้ 10 วิธี

ดังนั้น จะสร้างสามเหลี่ยมได้ 10 รูป

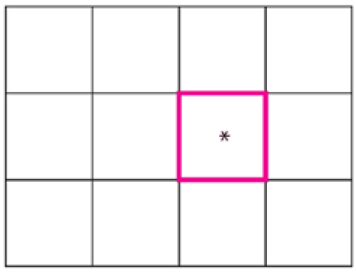
19. **ตอบ** 3



20. **ตอบ** 3

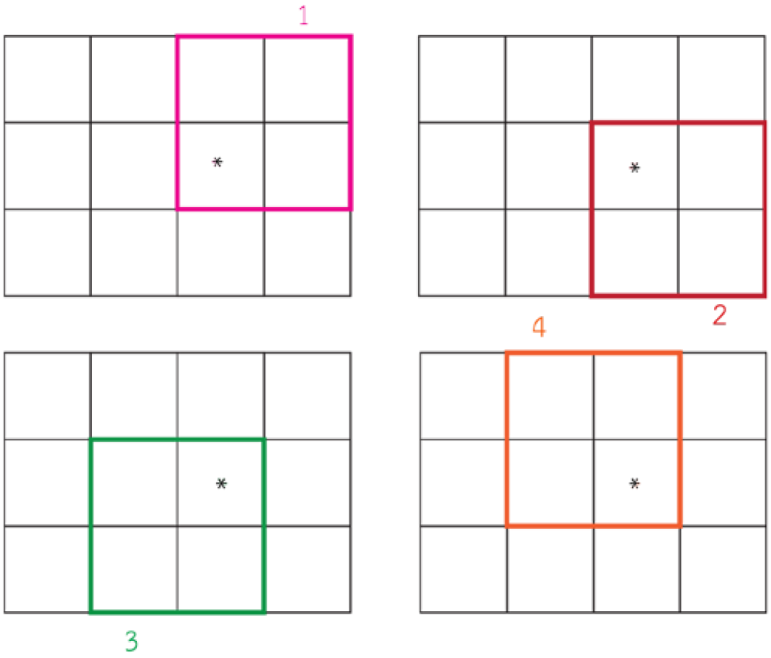
จัตุรัสจาก 1 รูปเล็ก

มี 1 แบบ



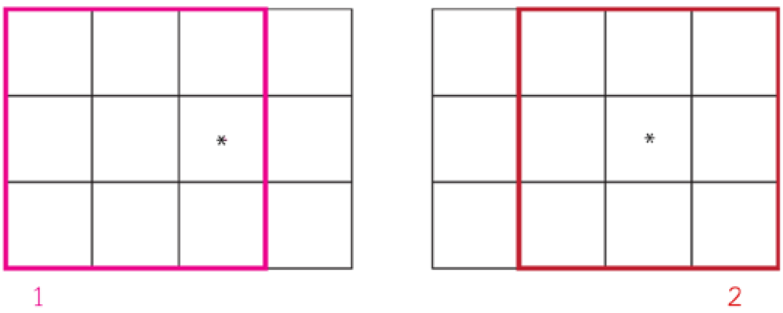
จัตุรัสจาก 4 รูปเล็ก

มี 4 แบบ



จัตุรัสจาก 9 รูปเล็ก

มี 2 แบบ



****