

## ADDITIONAL PROBLEMS

ข้อ 1 หน้า 11 ตอบ 59

$$S_n = 3n^2 + 2n \text{ จะได้ว่า } a_n = 6n - 1 \rightarrow a_{2^k} = 6(2^k) - 1$$

$$m = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}}$$

$$m = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^k} a_{2^k} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^k} [6(2^k) - 1]$$

$$m = \sum_{k=1}^{10} \left( 6 - \frac{1}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{10} 6 - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^k}$$

$$m = 60 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$m = 60 - \frac{\frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$m = 60 - 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^{10} = 59 + \frac{1}{1024}$$

∴ จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่า  $m$  คือ 59

ข้อ 2 หน้า 11 ตอบ 5

ในลำดับเลขคณิต  $a_m - a_n = (m - n)d$

จากโจทย์สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{1}{21(19d)} + \frac{1}{19(17d)} + \frac{1}{17(15d)} + \dots + \frac{1}{5(3d)} + \frac{1}{3(d)}$$

$$\frac{1}{d} \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 21} \right]$$

$$\frac{21}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right]$$

$$\left( \frac{21}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left[ 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \dots + \cancel{\frac{1}{19}} - \frac{1}{21} \right] = \left( \frac{21}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{20}{21} \right) = 5$$

\* วิธีลัด \*

$$\frac{1}{d} \left[ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{19 \cdot 21} \right]$$

$$\frac{21}{2} \left[ \frac{1}{3-1} \left( \frac{1}{\cancel{1 \cdot 3}} - \frac{1}{\cancel{19 \cdot 21}} \right) \right] = \frac{21}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{20}{21} \right) \right] = 5$$

ข้อ 3 หน้า 11 ตอบ 52

$$a_8 = a_1 + 7d \rightarrow 36 = 1 + 7d \rightarrow d = 5$$

ลำดับเลขคณิตชุดนี้ คือ 1, 6, 11, 16, ...,  $5n - 4$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = 3$$

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{a_4 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = 3$$

$$\frac{1}{d} \left[ \cancel{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} + \cancel{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}} + \cancel{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}} + \dots + \sqrt{a_n} - \cancel{\sqrt{a_{n-1}}} \right] = 3$$

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1} = 3(d) = 3(5) = 15$$

$$\sqrt{5n - 4} = 16$$

$$5n - 4 = 256$$

$$\therefore n = 52$$

ข้อ 4 หน้า 11 ตอบ 4

$\sum_{i=1}^n i$ ,  $\frac{\sqrt{10}}{3} \sum_{i=1}^n i^2$ ,  $\sum_{i=1}^n i^3$  เป็นลำดับเรขาคณิต จะได้ว่า

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{3} \sum_{i=1}^n i^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)\left(\sum_{i=1}^n i^3\right)$$

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{n}{6} (n+1)(2n+1)\right]^2 = \frac{n}{2} (n+1) \left[\frac{n}{2} (n+1)\right]^2$$

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{n^2}{36} (n+1)^2 (2n+1)^2 = \frac{n^3}{8} (n+1)^3$$

$$\frac{5}{9 \cdot 18} (2n+1)^2 = \frac{1}{8} n(n+1)$$

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 18} (4n^2 + 4n + 1) = n^2 + n$$

$$20(4n^2 + 4n + 1) = 81n^2 + 81n$$

$$n^2 + n - 20 = 0$$

$$(n+5)(n-4) = 0$$

$$\therefore n = 4$$

ข้อ 5 หน้า 11 ตอบ 36

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \rightarrow (n-1)a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \text{ โดยที่ } n \geq 3$$

แทน  $n = 3 : 2a_3 = a_1 + a_2 \rightarrow a_3 = \frac{a+b}{2}$

แทน  $n = 4 : 3a_4 = a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow 3a_4 = 3a_3 \rightarrow a_4 = a_3 = \frac{a+b}{2}$

แทน  $n = 5 : 4a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \rightarrow 4a_5 = 4a_4 \rightarrow a_5 = a_4 = \frac{a+b}{2}$

แสดงว่า ตั้งแต่  $n \geq 3$  แล้ว  $a_3 = a_4 = a_5 = \dots = \frac{a+b}{2}$

จากโจทย์  $\sum_{i=1}^{10} a_i = \frac{30}{8}$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \frac{30}{8}$$

$$10a_{11} = \frac{30}{8} \rightarrow a_{11} = \frac{3}{8} \rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{3}{8} \rightarrow a+b = \frac{3}{4} \text{ --- (1)}$$

และ  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = \frac{31}{8}$

$$a + 2b + 7\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{31}{8} \rightarrow a + 2b + \frac{21}{8} = \frac{31}{8} \rightarrow a + 2b = \frac{5}{4} \text{ --- (2)}$$

$$(2)-(1) : b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ จะได้ } a = \frac{1}{4} \quad \therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = (4+2)^2 = 36$$

ข้อ 6 หน้า 11 ตอบ 3

$2a+1$  ,  $2b-1$  ,  $3b-a$  ,  $a+3b$  เป็นลำดับเลขคณิตจะได้ว่า

$$(2a+1) + (3b-a) = 2(2b-1) \rightarrow a-b = -3 \text{ --- (1)}$$

$$(2b-1) + (a+3b) = 2(3b-a) \rightarrow 3a-b = 1 \text{ --- (2)}$$

(2)-(1) จะได้  $2a=4 \rightarrow a=2$  แทน  $a=2$  ลงใน (1) จะได้  $b=5$

ดังนั้นลำดับเลขคณิตชุดนี้ คือ 5, 9, 13, 17, ..... มี  $d=4$

$$\therefore a_{1000} = a_1 + (1000-1)d = 5 + (1000-1)(4) = 4001$$

ข้อ 7 หน้า 12 ตอบ 205

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  เป็นลำดับเลขคณิตมีผลต่างร่วมเป็น  $d_a$

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  เป็นลำดับเลขคณิตมีผลต่างร่วมเป็น  $d_b$

$$\text{จากโจทย์ } a_5 - a_1 = b_5 - b_2 \rightarrow 4d_a = 3d_b \rightarrow \frac{d_b}{d_a} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{(b_5 - b_4) + (b_4 - b_3) + (b_3 - b_2) + (b_2 - b_1)}{a_4 - a_2} = \frac{2d_b + 5d_b}{2d_a} = \frac{7(d_b)}{2(d_a)} = \frac{7\left(\frac{4}{3}\right)}{2} = \frac{14}{3}$$

เนื่องจาก ห.ร.ม ของ  $x$  กับ  $y$  เท่ากับ 1 ดังนั้น  $x = 14$  ,  $y = 3$

$$\therefore x^2 + y^2 = 14^2 + 3^2 = 196 + 9 = 205$$

ข้อ 8 หน้า 12 ตอบ a

จากโจทย์  $x(y-z)$  ,  $y(z-x)$  ,  $z(x-y)$  เป็นลำดับเรขาคณิตมีอัตราส่วนร่วมเป็น  $r$

$$\text{ให้ } a_1 = x(y-z) = xy - xz$$

$$a_2 = y(z-x) = yz - xy$$

$$a_3 = z(x-y) = xz - yz$$

$$\text{จะได้ว่า } a_1 + a_2 + a_3 = 0 \rightarrow a_1 + a_1r + a_1r^2 = 0 \rightarrow 1 + r + r^2 = 0$$

$$\therefore r \text{ สอดคล้องกับสมการ } r^2 + r + 1 = 0$$

ข้อ 9 หน้า 12 ตอบ 1

จากโจทย์  $a_{n+1} = n^2 - a_n$  สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{แทน } n=1 \text{ จะได้ } a_2 = 1 - a_1$$

$$\text{แทน } n=2 \text{ จะได้ } a_3 = 4 - a_2 = 4 - (1 - a_1) = 3 + a_1 = (1 + 2) + a_1$$

$$\text{แทน } n=3 \text{ จะได้ } a_4 = 9 - a_3 = 9 - (3 + a_1) = 6 - a_1 = (1 + 2 + 3) - a_1$$

$$\text{แทน } n=4 \text{ จะได้ } a_5 = 16 - a_4 = 16 - (6 - a_1) = 10 + a_1 = (1 + 2 + 3 + 4) + a_1$$

$$\text{แทน } n=100 \text{ จะได้ } a_{101} = (1 + 2 + 3 + \dots + 100) + a_1$$

$$5100 = \frac{100}{2}(100 + 1) + a_1 = 5050 + a_1$$

$$\therefore a_1 = 50$$

ข้อ 10 หน้า 12 ตอบ 4

$$\text{จากโจทย์ } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{6} [(n+2) - (n-1)] = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{99} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2-1} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) \right] = 2 \left( \frac{99}{100} \right) \\ &= \frac{198}{100} = 1.98 \end{aligned}$$

ข้อ 11 หน้า 12 ตอบ 3

$$2 \log_{2^{-2}} (4x + 24) + \log_2 (8 - 4x - x^2) = 0$$

$$\frac{2}{-2} \log_2 (4x + 24) + \log_2 (8 - 4x - x^2) = 0$$

$$\log_2 (8 - 4x - x^2) = \log_2 (4x + 24)$$

$$8 - 4x - x^2 = 4x + 24$$

$$0 = x^2 + 8x + 16$$

$$(x + 4)^2 = 0$$

$$x = -4$$

$$\therefore A = \{-4\} \rightarrow a = -4$$

$$\therefore (a + 1)^2 = (-4 + 1)^2 = 9$$

ข้อ 12 หน้า 12 ตอบ 125

ให้  $M = 2^x$ ,  $N = \log_5 y$

จาก  $2^x \log_5 y = 4 \log_{5^2} 5 + 2^{2x}$

$$2^x \log_5 y = 2 + 2^{2x} \rightarrow MN = 2 + M^2 \text{ --- (1)}$$

จาก  $2^x \log_5 y^3 = (\log_5 y)^2 + 9$

$$2^x (3 \log_5 y) = (\log_5 y)^2 + 9 \rightarrow 3MN = N^2 + 9 \text{ --- (2)}$$

จาก (1),  $N = \frac{2+M^2}{M} \rightarrow N = \frac{2}{M} + M \text{ --- (3)}$

แทน (3) ใน (2) จะได้  $3M \left( \frac{2}{M} + M \right) = \left( \frac{2}{M} + M \right)^2 + 9$

$$6 + 3M^2 = \frac{4}{M^2} + 4 + M^2 + 9$$

$$2M^2 - 7 - \frac{4}{M^2} = 0$$

$$2M^4 - 7M^2 - 4 = 0$$

$$(2M^2 + 1)(M^2 - 4) = 0 \quad \text{ใช้ไม่ได้}$$

$$M^2 = \left( -\frac{1}{2} \right), 4$$

$$M = 2, -2 \quad \text{ใช้ไม่ได้}$$

$$2^x = 2, \left( -2 \right)$$

ดังนั้น  $x = 1$

แทน  $M = 2$  ใน (3),  $N = \frac{2}{2} + 2 = 3$

$$\log_5 y = 3 \rightarrow y = 5^3 = 125 \quad \therefore xy = (1)(125) = 125$$

จะได้  $N = \{125\}$   $\therefore$  ค่ามากที่สุดของสมาชิกใน  $N$  คือ 125

ข้อ 13 หน้า 13 ตอบ 4.5

$$\log_m \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \log_n (6x^2 + 11x + 4) = 4$$

โดยที่  $m = \sqrt{3x+4}$  และ  $n = 2x+1$  ซึ่ง  $n > 0$  แน่ๆ

พบว่า  $m^2 = 3x+4$  และ  $m^2 n = 6x^2 + 11x + 4$

ดังนั้นสมการจะกลายเป็น

$$\log_m \sqrt{(2x+1)^2} + \log_n (m^2 n) = 4$$

$$\log_m |n| + \log_n m^2 + \log_n n = 4$$

$n > 0$  แน่ๆ ดังนั้น  $|n| = n$  จะได้

$$\log_m n + 2\log_n m + 1 = 4$$

$$\log_m n + \frac{2}{\log_m n} - 3 = 0 \quad \times \text{ตลอดด้วย } \log_m n$$

$$(\log_m n)^2 - 3\log_m n + 2 = 0$$

$$(\log_m n - 1)(\log_m n - 2) = 0$$

กรณี  $\log_m n = 1 \rightarrow n = m \rightarrow 2x+1 = \sqrt{3x+4}$

$$(2x+1)^2 = 3x+4 \rightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 3x - 4 = 0$$

$$4x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow (4x-3)(x+1) = 0$$

$x = \cancel{-1}, \frac{3}{4} \checkmark$  ตรวจสอบแล้วพบว่า  $x = -1$  ใช้ไม่ได้ แต่  $x = \frac{3}{4}$  ใช้ได้

กรณี  $\log_m n = 2 \rightarrow n = m^2 \rightarrow 2x+1 = 3x+4 \rightarrow x = \cancel{-3}$

ดังนั้น  $A = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$  จะได้  $B = \left\{ 8 \left( \frac{3}{4} \right)^2 \right\} = \{4.5\}$

$\therefore$  ผลบวกสมาชิกของเซต  $B = 4.5$



ข้อ 14 หน้า 13 ตอบ 2

$$3^{2x+10} - 4 \cdot 3^{x+6} + 27 \leq 0$$

$$(3^{x+5})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3^{x+5} + 27 \leq 0$$

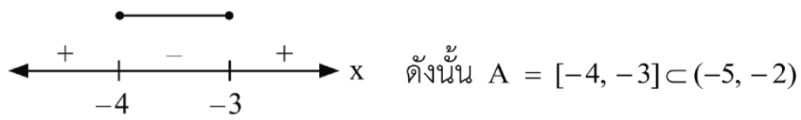
ให้  $3^{x+5} = A$

$$A^2 - 12A + 27 \leq 0$$

$$(A-3)(A-9) \leq 0$$

กรณี  $A = 3 : 3^{x+5} = 3^1 \rightarrow x = -4$

กรณี  $A = 9 : 3^{x+5} = 3^2 \rightarrow x = -3$



**ข้อ 15 หน้า 13 ตอบ 4**

$$\log_3(5(6^a) - 2^{2a+1}) > 2a+1$$

$$5(2 \cdot 3)^a - 2 \cdot (2^a)^2 > 3^{2a+1}$$

$$5 \cdot 2^a \cdot 3^a - 2(2^a)^2 > 3 \cdot (3^a)^2$$

ให้  $A = 3^a$ ,  $B = 2^a$  จะได้

$$5 \cdot B \cdot A - 2B^2 > 3A^2$$

$$3A^2 - 5AB + 2B^2 < 0$$

$$(3A - 2B)(A - B) < 0$$

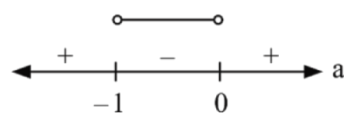
กรณี  $3A - 2B = 0 \rightarrow 3 \cdot 3^a = 2 \cdot 2^a$

$$3^{a+1} = 2^{a+1}$$

$$a+1 = 0 \quad \therefore a = -1$$

กรณี  $A - B = 0 \rightarrow 3^a = 2^a$

$$\therefore a = 0 \quad \text{จะได้}$$



พิจารณาเงื่อนไขของ  $\log : 5(6^a) - 2^{2a+1} > 0$

$$5(2 \cdot 3)^a - 2(2^a)^2 > 0$$

$$5 \cdot 2^a \cdot 3^a - 2 \cdot 2^a \cdot 2^a > 0$$

$> 0$  เสมอ

$$2^a(5 \cdot 3^a - 2 \cdot 2^a) > 0$$

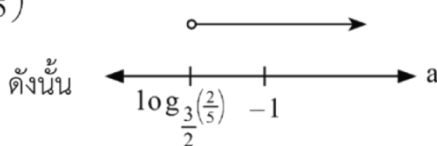
$$5 \cdot 3^a - 2 \cdot 2^a > 0$$

$$5 \cdot 3^a > 2 \cdot 2^a$$

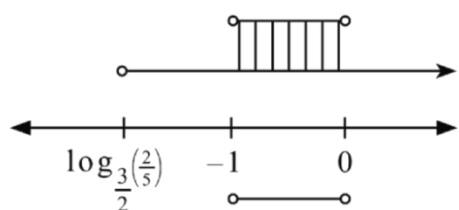
$$\left(\frac{3}{2}\right)^a > \frac{2}{5}$$

Take log ฐาน  $\frac{3}{2}$  ทั้ง 2 ข้าง :  $a > \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{5}\right)$

ซึ่ง  $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{5}\right) < \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right) = -1$



คำตอบ  $\cap$  เงื่อนไข จะได้



คำตอบของอสมการคือ  $(-1, 0)$

$$\therefore 1 < |a-1| < 2 \text{ ตามตัวเลือกที่ 4}$$

ข้อ 16 หน้า 13 ตอบ 4

$$\text{จาก } \log_a b = 3 \rightarrow \frac{\log b}{\log a} = 3$$

$$\log b = 3 \log a \quad \text{---(1)}$$

$$\text{และ } \log b + \log a = 2 \quad \text{---(2)}$$

$$\text{แทน (1) ใน (2), } 3 \log a + \log a = 2$$

$$\log a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

ข้อ 17 หน้า 13 ตอบ 2

$$(2^2)^{|3x-1|} - 16 = 6(2^{|3x-1|}), \text{ ให้ } A = 2^{|3x-1|}$$

$$\text{จะได้ } A^2 - 6A - 16 = 0$$

$$(A-8)(A+2) = 0$$

$$A = 8, -2$$

$$2^{|3x-1|} = 8, \text{ } \textcircled{-2} \text{ ใช้ไม่ได้}$$

$$|3x-1| = 3$$

$$3x-1 = 3, -3$$

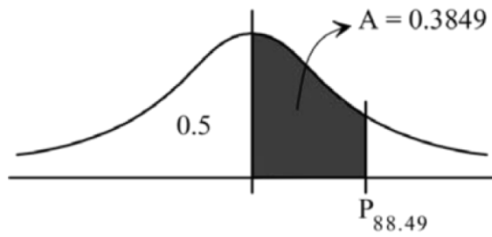
$$3x = 4, -2$$

$$x = \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ผลบวกคำตอบ} = \frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

ข้อ 18 หน้า 14 ตอบ  $P_{15.87}$

คณิตศาสตร์

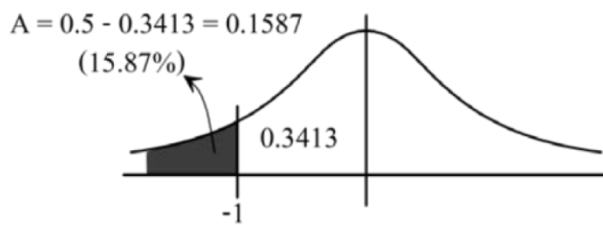


$$A = 0.3849 \rightarrow Z = 1.2$$

$$1.2 = \frac{x-63}{5} \rightarrow x = 69$$

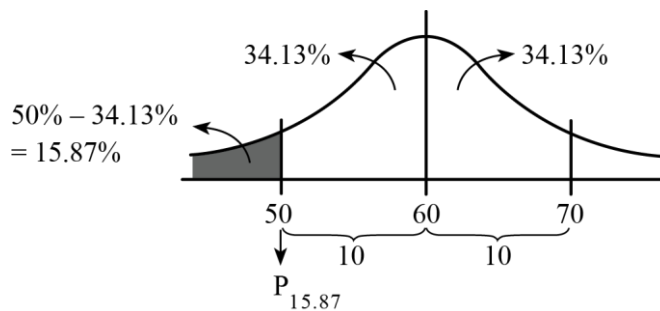
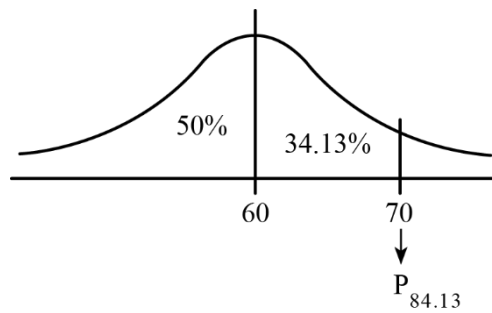
ภาษาอังกฤษ

$$Z = \frac{69-72}{3} = -1 \rightarrow Z = 0.3413$$



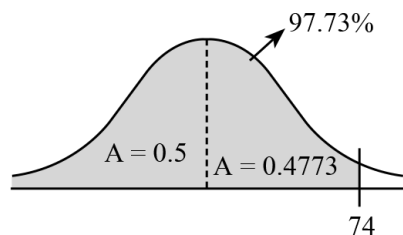
∴ คะแนนสอบวิชาภาษาอังกฤษจะตรงกับ  $P_{15.87}$

ข้อ 19 หน้า 14 ตอบ 1



ข้อ 20 หน้า 14 ตอบ 62

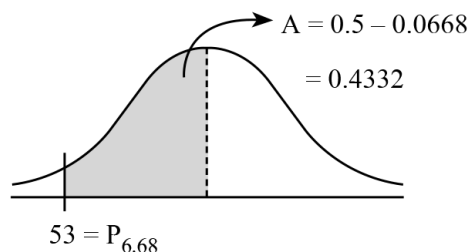
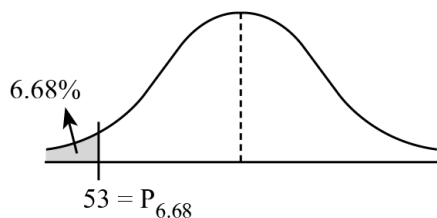
จากโจทย์



∴ แสดงว่า  $x = 74 \rightarrow A = 0.4773 \rightarrow z = 2$

$$\text{จาก } z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow 2 = \frac{74 - \mu}{\sigma} \quad \text{--- (1)}$$

และ



∴ แสดงว่า  $x = 53 \rightarrow A = 0.4332 \rightarrow z = -1.5$

$$\text{จาก } z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow -1.5 = \frac{53 - \mu}{\sigma} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)}, \quad \frac{2}{-1.5} = \frac{74 - \mu}{53 - \mu}$$

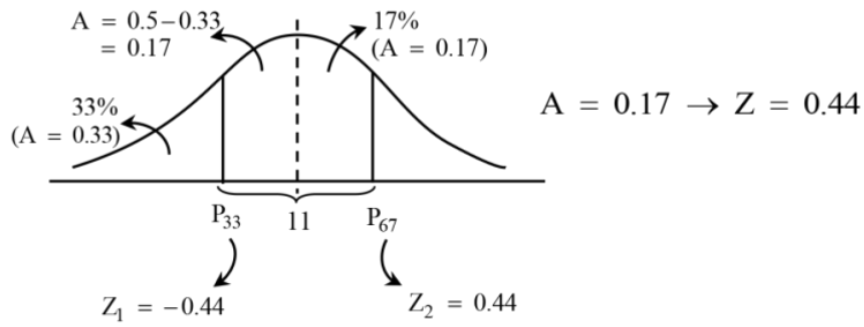
$$\frac{-4}{3} = \frac{74 - \mu}{53 - \mu}$$

$$-212 + 4\mu = 222 - 3\mu$$

$$7\mu = 434$$

$$\mu = 62$$

ข้อ 21 หน้า 15 ตอบ 3

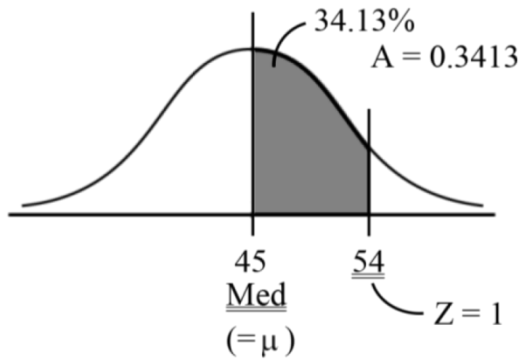


$$\text{จาก } \Delta Z = \frac{\Delta x}{\sigma}$$

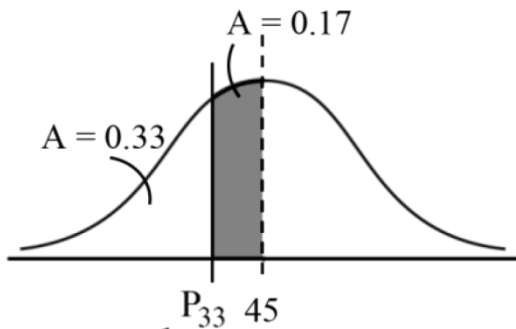
$$0.44 - (-0.44) = \frac{11}{\sigma}$$

$$0.88 = \frac{11}{\sigma} \rightarrow \sigma = 12.5$$

ข้อ 22 หน้า 15 ตอบ 3



$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow 1 = \frac{54 - 45}{\sigma} \rightarrow \sigma = 9$$



$$Z = -0.44 \quad \therefore -0.44 = \frac{P_{33} - 45}{9}$$

$$P_{33} = 45 - 0.44 \times 9$$

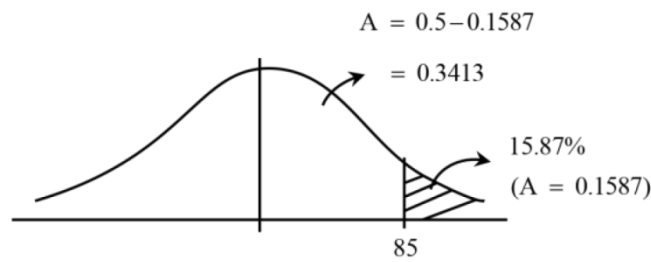
$$\therefore \frac{5}{3} P_{33} = \frac{5}{3} (45 - 0.44 \times 9) = 68.4$$

ข้อ 23 หน้า 15 ตอบ 4

จากโจทย์  $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{25}{100}$

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{4} \rightarrow \mu = 4\sigma \text{ ——— (1)}$$

และจากโจทย์



$$A = 0.3413 \rightarrow Z = 1$$

จาก  $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$1 = \frac{85 - \mu}{\sigma}$$

$$\sigma = 85 - \mu \text{ ——— (2)}$$

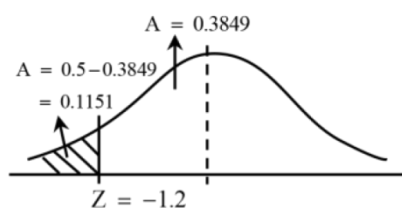
แทน (1) ใน (2)

$$\sigma = 85 - 4\sigma$$

$$5\sigma = 85 \rightarrow \sigma = 17$$

แทนใน (1)  $\mu = 4(17) = 68$

$\therefore$  เมื่อ  $x = 47.6 \rightarrow Z = \frac{47.6 - 68}{17} = -1.2$

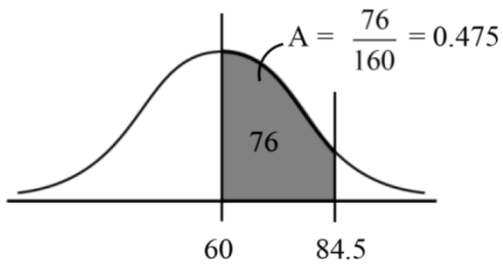
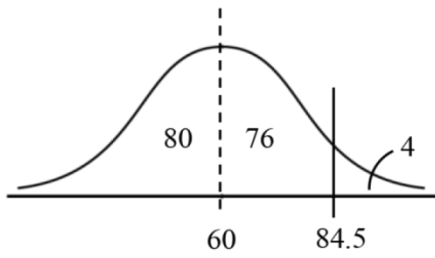


$$Z = 1.2 \rightarrow A = 0.3849$$

$\therefore$  คะแนน 47.6 ตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 11.51



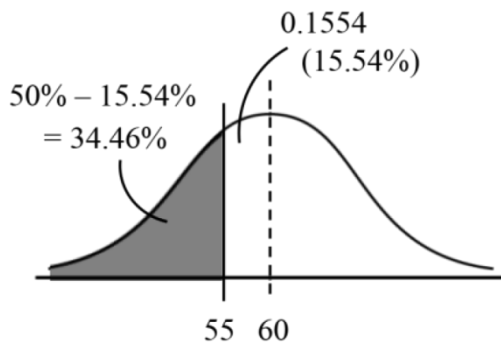
ข้อ 24 หน้า 16 ตอบ 3



$$A = 0.475 \rightarrow Z = 1.96$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow 1.96 = \frac{84.5 - 60}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{24.5}{1.96}$$



$$Z = \frac{55 - 60}{\frac{24.5}{1.96}} = \frac{(-5) \times 1.96}{24.5} = -0.4$$

$$Z = 0.4 \rightarrow A = 0.1554$$

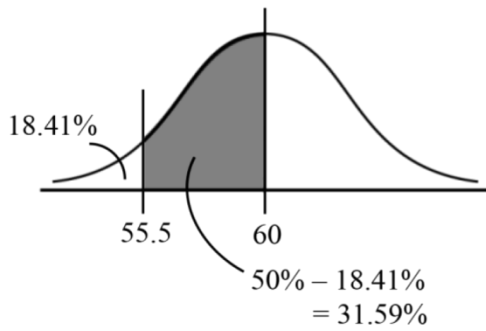
ตามรูปจะพบว่า จำนวนนักเรียนที่น้อยกว่า 55 คะแนนมีอยู่ 34.46%

$$\therefore 55 = P_{34.46}$$

ข้อ 25 หน้า 16 ตอบ 1

การแจกแจงปกติ

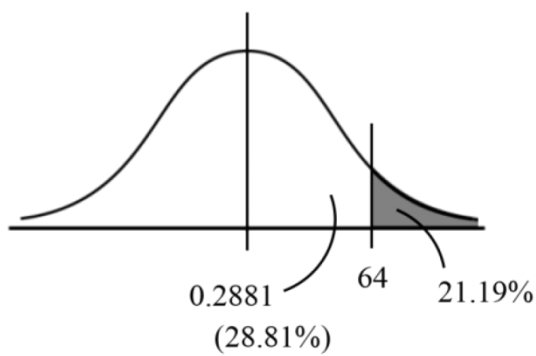
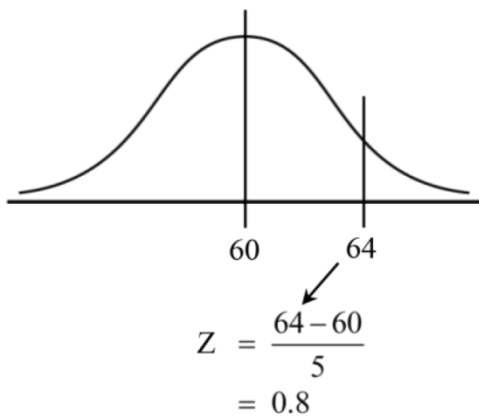
$$\therefore \mu = \text{Med} = 60$$



$$A = 0.3159 \rightarrow Z = 0.9$$

$$\therefore x = 55.5 \rightarrow Z = -0.9$$

$$-0.9 = \frac{55.5 - 60}{\sigma} \quad \therefore \sigma = 5$$



**ข้อ 26 หน้า 16 ตอบ 1**

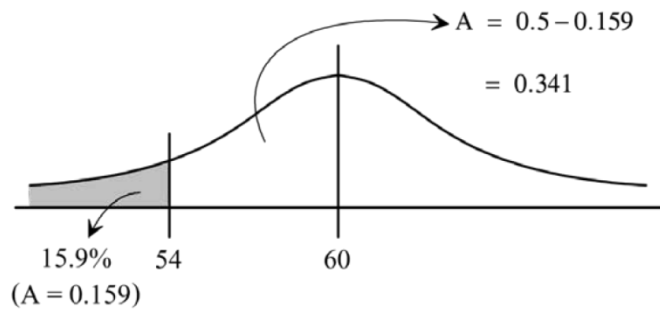
พิจารณา ก.

$$x = \text{Mode} - 2\sigma = \mu - 2\sigma \quad (\text{โค้งปกติ Mode} = \mu)$$

$$\therefore Z = \frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} = -2 \quad \text{ก. ถูก}$$

พิจารณา ข.

$$\mu = \text{Med} = 60$$



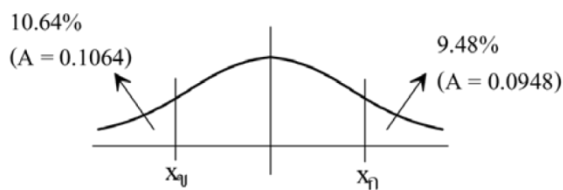
เมื่อ  $A = 0.341 \rightarrow Z = -1 \quad (x = 54)$

$$\therefore \text{จาก } Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$-1 = \frac{54 - 60}{\sigma} \rightarrow \sigma = 6$$

และ  $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{6}{60} = 0.1 \quad \text{ข. ถูก}$

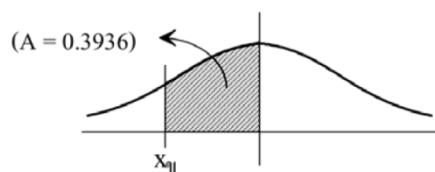
**ข้อ 27 หน้า 17 ตอบ 20**



โดย  $x_n - x_u = 51$



$$\therefore z_n = 1.31$$



$$\therefore z_u = -1.24$$

จาก  $z_n - z_u = \frac{x_n - x_u}{\sigma}$

$$1.31 - (-1.24) = \frac{51}{\sigma} \rightarrow \sigma = 20$$

ข้อ 28 หน้า 17 ตอบ 61

จากโจทย์  $N_{ช} = 18, N_{ญ} = 30 - 18 = 12$

$$\mu_{รวม} = 64, \mu_{ช} = 64 \quad \therefore \mu_{ญ} = 64 \text{ ด้วย}$$

และ  $\sigma_{ช}^2 = 10, \sigma_{ญ}^2 = 5$

เมื่อ  $\mu_{ช} = \mu_{ญ}$

$$\sigma_{รวม}^2 = \frac{N_{ช} \sigma_{ช}^2 + N_{ญ} \sigma_{ญ}^2}{N_{ช} + N_{ญ}}$$

$$= \frac{3 \cdot 10 + 2 \cdot 5}{3 + 2}$$

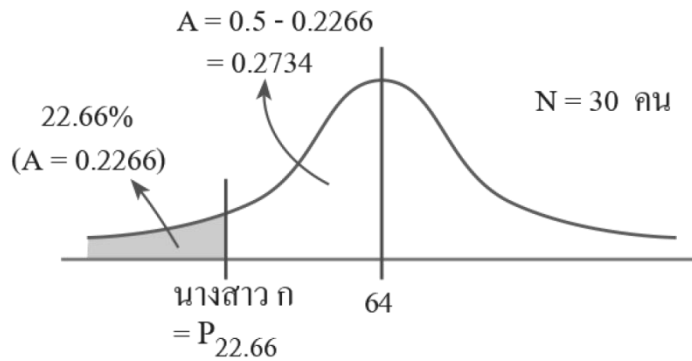
ใช้  $N_{ช} = 3, N_{ญ} = 2$

เพราะ  $N_{ช} : N_{ญ} = 18 : 12 := 3 : 2$

$$= \frac{80}{5} = 16$$

$$\therefore \sigma_{รวม} = 4$$

เมื่อ นางสาว ก สอบได้  $P_{22.66}$  ของนักเรียนทั้งห้อง



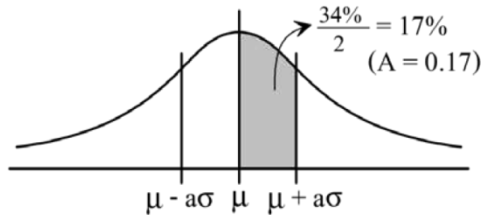
จากตาราง  $A = 0.2734 \rightarrow A = 0.75$

$$\therefore Z_{ก} = -0.75 \quad (Z \text{ ด้านซ้าย} < 0)$$

$$\text{จาก } Z_{ก} = \frac{x_{ก} - \mu_{รวม}}{\sigma_{รวม}}$$

$$-0.75 = \frac{x_{ก} - 64}{4} \rightarrow x_{ก} = 61 \text{ คะแนน}$$

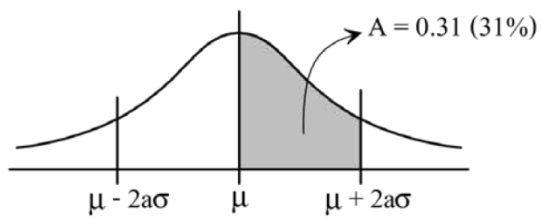
ข้อ 29 หน้า 17 ตอบ 2



เมื่อ  $x = \mu + a\sigma \rightarrow Z = \frac{(\mu + a\sigma) - \mu}{\sigma} = a$

จากตาราง  $A = 0.17 \rightarrow Z = 0.44$

$\therefore a = 0.44$

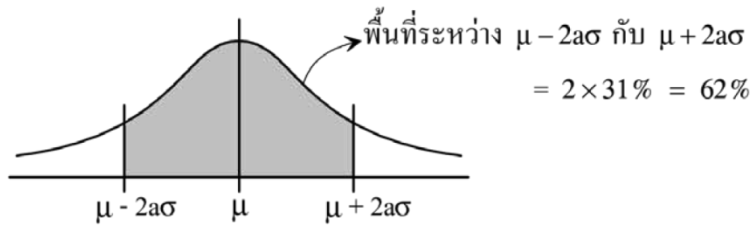


เมื่อ  $x = \mu + 2a\sigma \rightarrow Z = \frac{(\mu + 2a\sigma) - \mu}{\sigma} = 2a$

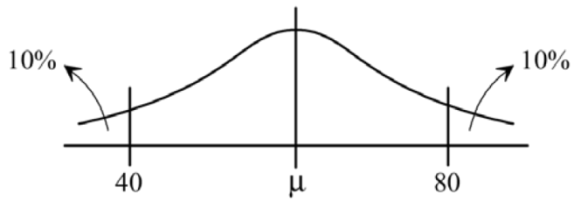
$Z = 2(0.44) = 0.88$

จากตาราง  $Z = 0.88 \rightarrow A = 0.31$

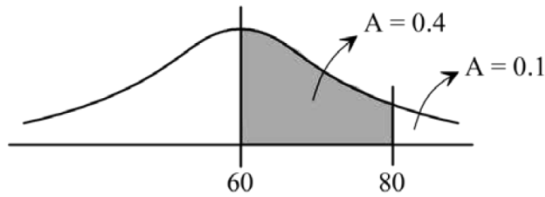
ดังนั้น



ข้อ 30 หน้า 17 ตอบ 1

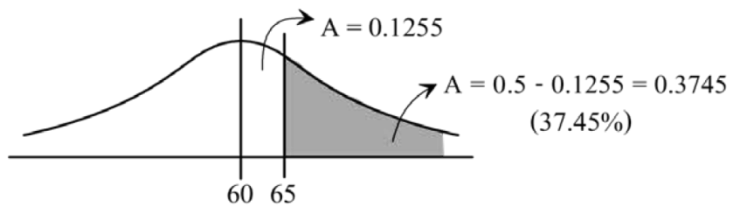


จากกราฟ (สมมาตร)  $\mu = \frac{40+80}{2} = 60$



ได้ว่า  $A = 0.4 \rightarrow Z = 1.28$

ดังนั้น  $1.28 = \frac{80-60}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{20}{1.28}$



เมื่อ  $x = 65 \rightarrow Z = \frac{65-60}{\frac{20}{1.28}} = \frac{1.28}{4} = 0.32$

จากตาราง  $Z = 0.32 \rightarrow A = 0.1255$

ดังนั้น จำนวนนักเรียนที่สอบได้มากกว่า 65 คะแนน  
จะมีจำนวนคิดเป็น 37.45% ตามรูป

ข้อ 31 หน้า 18 ตอบ 3

$$y = mx + c \quad \text{---(1)}$$

$$\Sigma y = m\Sigma x + c \cdot N$$

$$48 = m(40) + c(8)$$

$$6 = 5m + c \quad \text{---(2)}$$

นำ x คูณ (1)

$$xy = mx^2 + cx$$

$$\Sigma xy = m\Sigma x^2 + c\Sigma x$$

$$270 = m(210) + c(40) \quad \text{---(3)}$$

$$(3) \div 10, 27 = 21m + 4c \quad \text{---(4)}$$

$$(2) \times 4, 24 = 20m + 4c \quad \text{---(5)}$$

$$(4) - (5), 3 = m$$

$$\therefore m = 3 \text{ และ } c = -9 \text{ (แทน } m \text{ ใน (2))}$$

$$\text{ดังนั้น } y = 3x - 9$$

$$\text{และ } x = 4 \rightarrow y = 3(4) - 9$$

$$= 3$$

ข้อ 32 หน้า 18 ตอบ 2

$$\text{จาก } y_i = 8x_i + 13.5 \quad \text{---(1)}$$

$$\sum_{i=1}^8 y_i = \sum_{i=1}^8 (8x_i + 13.5)$$

$$\sum_{i=1}^8 y_i = \sum_{i=1}^8 8x_i + \sum_{i=1}^8 13.5$$

$$\sum_{i=1}^8 y_i = 8 \sum_{i=1}^8 x_i + (8)(13.5)$$

$$\text{จาก } \sum_{i=1}^8 y = 492$$

$$492 = 8 \sum_{i=1}^8 x_i + 8(13.5)$$

นำ 8 ทหาร 2 ข้าง

$$61.5 = \sum_{i=1}^8 x_i + 13.5$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 48$$

$$(1) \times x_i, x_i y_i = 8x_i^2 + 13.5x_i$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i y_i = \sum_{i=1}^8 (8x_i^2 + 13.5x_i)$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i y_i = \sum_{i=1}^8 8x_i^2 + \sum_{i=1}^8 13.5x_i$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 8 \sum_{i=1}^8 x_i^2 + 13.5 \sum_{i=1}^8 x_i$$

จาก  $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 3432$  และ  $\sum_{i=1}^8 x_i = 48$

$$3432 = \sum_{i=1}^8 x_i^2 + 13.5(48)$$

นำ 8 ทหาร 2 ข้าง

$$429 = \sum_{i=1}^8 x_i^2 + 13.5(6)$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 348$$

จาก  $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \mu^2$  โดย  $\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^8 x_i^2}{8} - \left( \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} \right)^2 \\ &= \frac{348}{8} - \left( \frac{48}{8} \right)^2 = 7.5 \end{aligned}$$



ข้อ 33 หน้า 19 ตอบ 1

	x	y	xy	x <sup>2</sup>
	0	1	0	0
	1	0.8	0.8	1
	2	0.8	1.6	4
	3	0.6	1.8	9
<b>รวม</b>	<b>6</b>	<b>3.2</b>	<b>4.2</b>	<b>14</b>

จากตารางได้ว่า

$$\Sigma x = 6, \Sigma y = 3.2, \Sigma xy = 4.2,$$

$$\Sigma x^2 = 14 \text{ และ } N = 4 \text{ (ข้อมูล 4 ชุด)}$$

$$\text{จาก } y = ax + b \quad \text{---(1)}$$

$$\Sigma y = \Sigma ax + \Sigma b$$

$$\Sigma y = a \Sigma x + Nb \quad \text{---(2)}$$

$$\text{จาก (1) } \cdot x \quad xy = ax^2 + bx$$

$$\Sigma xy = \Sigma ax^2 + \Sigma bx$$

$$\Sigma xy = a \Sigma x^2 + b \Sigma x \quad \text{---(3)}$$

$$\text{จาก (2) ได้ } 3.2 = a(6) + 4b$$

$$3a + 2b = 1.6 \quad \text{---(4)}$$

$$\text{จาก (3) ได้ } 4.2 = a(14) + b(6)$$

$$7a + 3b = 2.1 \quad \text{---(5)}$$

$$(5) \times 2 - (4) \times 3, 5a = -0.6$$

$$a = -0.12$$

$$\text{แทน } a \text{ ใน (4) ได้ } b = 0.98$$

$$\text{จะได้ว่า } 0.98 = (-0.12) + 1.1 \text{ (ก) ถูก}$$

$$\text{และ } y = -0.12x + 0.98$$

$$\text{ดังนั้น เมื่อ } x = 8$$

$$\text{ได้ } y = -0.12(8) + 0.98 = 0.02$$

$$\text{(ข) ถูก}$$

ข้อ 34 หน้า 19 ตอบ 43.5

$$\text{จาก } \Sigma(x+y) = 275 \rightarrow \Sigma x + \Sigma y = 275 \quad \text{————(1)}$$

$$\text{และ } \Sigma(20x-y) = 250 \rightarrow \Sigma 20x - \Sigma y = 250$$

$$20\Sigma x - \Sigma y = 250 \quad \text{————(2)}$$

$$(1) + (2) \text{ จะได้ } 21\Sigma x = 525 \rightarrow \Sigma x = 25$$

$$\text{แทน } \Sigma x = 25 \text{ ใน (1) ได้ } \Sigma y = 250$$

$$\therefore \Sigma x = 25, \Sigma y = 250, N = 5$$

$$\Sigma y = m\Sigma x + N \cdot c$$

$$250 = 25m + 5c \quad \text{————(3)}$$

$$\Sigma xy = m\Sigma x^2 + c\Sigma x$$

$$1575 = 175m + 25c$$

$$\div 5 \left( \begin{array}{l} 1575 = 175m + 25c \\ 315 = 35m + 5c \end{array} \right) \quad \text{————(4)}$$

$$\text{แก้ (3), (4) ได้ } m = 6.5, c = 17.5$$

$$\therefore y = 6.5x + 17.5$$

$$\begin{aligned} x = 4 \rightarrow y &= 6.5(4) + 17.5 \\ &= 43.5 \end{aligned}$$

ข้อ 35 หน้า 19 ตอบ 1

จาก  $\bar{y} = m\bar{x} + c$

$\therefore 8 = 5m + c$  — (1)

จาก  $\Sigma xy = m\Sigma x^2 + c\Sigma x$

$(51.8)(5) = 185m + 25c$   
 $\div 5 \rightarrow 51.8 = 37m + 5c$  — (2)

แก้ (1), (2) ได้  $m = \frac{11.8}{12}$ ,  $c = \frac{37}{12}$

$\therefore y = \frac{11.8}{12}x + \frac{37}{12}$

$x = 2 \rightarrow y = \frac{11.8}{12} \cdot 2 + \frac{37}{12} = 5.05$

จาก  $\mu_{xy} = 51.8$

$\therefore \Sigma xy = \mu_{xy} \cdot N$   
 $= 51.8(5)$

$\sigma_x^2 = 12$

จาก  $\sigma_x^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \mu_x^2$

$12 = \frac{\Sigma x^2}{5} - 5^2$

$\Sigma x^2 = 185$

ข้อ 36 หน้า 20 ตอบ 3

จากตาราง  $\Sigma x = 0$  ,  $\Sigma x^2 = 10$  ,  $\Sigma xy = 13$  ,  $\Sigma y = 15.5 + a$

และจาก  $y = mx + c$

ให้ พ.ศ. 2552  $\rightarrow x = 0$

$\therefore$  พ.ศ. 2557  $\rightarrow x = 5$

จากโจทย์  $x = 5 \rightarrow y = 10.28$  (แสนคน)

$$\therefore 10.28 = m(5) + c \text{ ——— (1)}$$

และจาก  $\Sigma y = m\Sigma x + N \cdot c$

$$15.5 + a = m(0) + 5 \cdot c$$

$$15.5 + a = 5c \text{ ——— (2)}$$

และจาก  $\Sigma xy = m\Sigma x^2 + c\Sigma x$

$$13 = m(10) + c(0)$$

$$m = \frac{13}{10}$$

แทน  $m$  ใน (1) ได้  $c = 3.78$

แทน  $c$  ใน (2) ได้  $a = 3.4 \quad \therefore$  ปี พ.ศ. 2552 มี 340,000 คน

**Note** โจทย์ถามว่าในปี พ.ศ. 2552 มีประชากรจริงๆ กี่คน (ไม่ใช่ค่าทำนาย)  
ต้องตอบ  $a \times 100,000$  คน (340,000 คน)

ข้อ 37 หน้า 20 ตอบ 2

เมื่อ  $y$  เป็นตัวแปรต้น และ  $x$  เป็นตัวแปรตาม  
โดยจะใช้  $y$  พยกรณ์  $x$  สมการจึงเป็น

$$x = my + c \quad \text{--- (1)}$$

$$\Sigma x = m\Sigma y + N \cdot c$$

จากตาราง  $\Sigma x = 20$ ,  $\Sigma y = 25$  และ  $N = 5$

$$\therefore 20 = m(25) + 5c$$

**นำ 5 ทาร**

$$4 = 5m + c \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times y, \quad xy = my^2 + cy$$

$$\Sigma xy = m\Sigma y^2 + c\Sigma y$$

จากตาราง  $\Sigma xy = 131$  และ  $\Sigma y^2 = 175$

$$\therefore 131 = m(175) + c(25) \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) \times 25, \quad 100 = 125m + 25c \quad \text{--- (4)}$$

$$(3) - (4), \quad 31 = 50m \rightarrow m = \frac{31}{50} = 0.62$$

แทน  $m$  ใน (2) ได้

$$4 = 5\left(\frac{31}{50}\right) + c \rightarrow c = 0.9$$

$$\therefore x = 0.62y + 0.9$$

และ  $y = 8 \rightarrow x = 0.62(8) + 0.9 = 5.86$

ข้อ 38 หน้า 20 ตอบ 1

จากโจทย์

	x	y	xy	x <sup>2</sup>
	1	3	3	1
	2	4	8	4
	3	6	18	9
	4	7	28	16
	5	10	50	25
รวม	15	30	107	55

จาก  $y = mx + c$

$$\Sigma y = m \Sigma x + Nc$$

$$30 = m(15) + 5c \rightarrow 3m + c = 6 \text{ ——(1)}$$

และ  $xy = mx^2 + cx$

$$\Sigma xy = m \Sigma x^2 + c \Sigma x$$

$$107 = m(55) + c(15)$$

$$55m + 15c = 107 \text{ ——(2)}$$

แก้ (1), (2) ได้  $m = \frac{17}{10}$ ,  $c = \frac{9}{10}$

$\therefore m + c = 2.6$  ดังนั้น (ก) ถูก

โดย  $y = \frac{17}{10}x + \frac{9}{10}$

และเมื่อ  $x = 15 \rightarrow y = \frac{17}{10}(15) + \frac{9}{10} = 26.4$

ดังนั้น (ข) ถูก

ข้อ 39 หน้า 21 ตอบ 12

กำหนดให้  $y$  เป็นจำนวนแปรต้น และ  $x$  เป็นตัวแปรตาม สมการความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรงคือ  $x = my + c$  ——(1)

จะได้ว่า  $\Sigma x = m\Sigma y + Nc$  ——(2)

และนำ  $y$  คูณ 2 ข้างของสมการ (1)

$$xy = my^2 + cy$$

$$\therefore \Sigma xy = m\Sigma y^2 + c\Sigma y \text{ ——(3)}$$

จะได้  $\Sigma x = \mu_x N = 9 \times 6 = 54$  และ  $\Sigma y = \mu_y N = 6 \times 6 = 36$

จาก (2)  $\therefore 54 = m(36) + 6c$

นำ 6หาร 2ข้าง

$$9 = 6m + c \text{ ——(4)}$$

จาก (3)  $\therefore 428 = m(268) + c(36)$

นำ 4หาร 2ข้าง,  $107 = 67m + 9c$  ——(5)

แก้ (4), (5)  $m = 2$  ,  $c = -3$

$$\therefore x = 2y - 3$$

และเมื่อ  $y = 7.5 \rightarrow x = 2(7.5) - 3 = 12$

ข้อ 40 หน้า 21 ตอบ 1

$$\text{จาก } y = ax + b \text{ ———(1)}$$

$$\Sigma y = a \Sigma x + N \cdot b$$

$$45 = a(20) + 5b$$

$$\therefore 9 = 4a + b \text{ ———(1)}$$

นำ  $x$  คูณ (1) ,  $xy = ax^2 + bx$

$$\Sigma xy = a \Sigma x^2 + b \Sigma x$$

$$220 = a(100) + b(20)$$

$$11 = 5a + b \text{ ———(2)}$$

แก้ (1), (2) ได้  $a = 2$  ,  $b = 1$

พิจารณา (ก) พบว่า  $a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$  (ก) ถูก

พิจารณา (ข) จะได้  $y = 2x + 1$

ดังนั้น ถ้า  $x$  เป็นจำนวนเต็มแล้ว  $y$  จะเป็นจำนวนคี่ (ข) ถูก

\*\*\*\*\*