

คณิตศาสตร์ PAT1 & วิชาสามัญ
โรงเรียนตากสินประชาสรรค์
เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

ข้อ 2 ตอบ 12

$$A : \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x + 1} \right)^2 = (x + 2)^2 \quad \text{เงื่อนไข } x \geq -1$$

$$x^2 - x + 1 + x + 1 + 2\sqrt{(x^2 - x + 1)(x + 1)} = x^2 + 4x + 4$$

$$2\sqrt{x^3 + 1} = 4x + 2 \rightarrow \left(\sqrt{x^3 + 1} \right)^2 = (2x + 1)^2$$

$$x^3 + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$x^3 - 4x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ หรือ } x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{ดังนั้น } A = \{0, 2 + 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2}\}$$

$$B : \frac{(\sqrt{5-x})^3 + (\sqrt{x-3})^3}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2 \rightarrow \frac{(\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3})((\sqrt{5-x})^2 - \sqrt{(5-x)(x-3)} + (\sqrt{x-3})^2)}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2$$

$$5 - x - \sqrt{(5-x)(x-3)} + x - 3 = 2 \rightarrow -\sqrt{(5-x)(x-3)} = 0$$

$$x = 5 \text{ หรือ } 3 \quad \text{ดังนั้น } B = \{3, 5\}$$

$$\text{จะได้ } A \cup B = \{2 - 2\sqrt{2}, 0, 3, 2 + 2\sqrt{2}, 5\}$$

$$\therefore \text{ผลบวกสมาชิกภายในเซต } A \cup B = 12$$

ข้อ 3 ตอบ ตัวเลือกที่ 2

$$|x^2 + 5x| + |x - x^2| = |6x|$$

มองให้ $a = x^2 + 5x$, $b = x - x^2$ จะเห็นว่า $6x = (x^2 + 5x) + (x - x^2)$

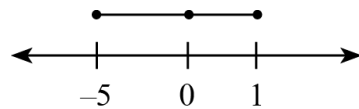
$$6x = a + b$$

ดังนั้น สมการดังกล่าวอยู่ในรูป $|a| + |b| = |a + b|$

แสดงว่า $ab \geq 0 \rightarrow (x^2 + 5x)(x - x^2) \geq 0$

$$x^2(x+5)(1-x) \geq 0 \xrightarrow{x(-1)} x^2(x+5)(x-1) \leq 0$$

จะได้ $x = 0$ หรือ $(x+5)(x-1) \leq 0$



ตัดได้ แต่ต้องดูว่ามี x อะไรที่แทนในตัวที่ตัด แล้วทำให้สมการเป็นจริงด้วย

$$\begin{aligned} \therefore \text{ผลรวมจำนวนเต็มทั้งหมดในช่วงคำตอบ} &= (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 \\ &= -14 \end{aligned}$$

ข้อ 6 ตอบ ตัวเลือกที่ 2

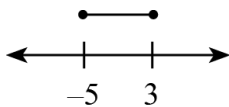
เนื่องจาก $2x^2 + 1 > 0$ เสมอ ดังนั้น $|2x^2 + 1| = 2x^2 + 1$

$$\begin{aligned} \text{และ } |-x^2 + 2x - 1| &= |-(x^2 - 2x + 1)| \quad \text{จากสมบัติที่ว่า } |\Delta| = |-\Delta| \\ &= |x^2 - 2x + 1| \\ &\quad \text{(x-1)^2 ≥ 0 เสมอ} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } |-x^2 + 2x - 1| = x^2 - 2x + 1$$

จากอสมการจะได้ $(2x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1) \leq 15$

$$2x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1 \leq 15 \rightarrow x^2 + 2x - 15 \leq 0 \rightarrow (x+5)(x-3) \leq 0$$



$\therefore$ ในช่วงดังกล่าวมีคำตอบเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด 9 จำนวน

ข้อ 8 ตอบ 4

$$A : x^2 + 2|x - 3| - 9 > 0$$

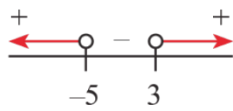
$$2|x - 3| > 9 - x^2$$

$$|2x - 6| > 9 - x^2$$

$$2x - 6 > 9 - x^2 \quad \text{หรือ} \quad 2x - 6 < -(9 - x^2)$$

$$x^2 + 2x - 15 > 0 \quad \cup \quad 2x - 6 < -9 + x^2$$

$$(x + 5)(x - 3) > 0$$

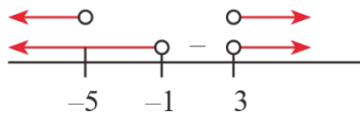
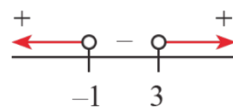


$$-x^2 + 2x + 3 < 0$$

นำ -1 คูณ 2 ข้าง

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$(x - 3)(x + 1) > 0$$



$$\therefore A = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

$$B : |x - 3| < 2$$

$$-2 < x - 3 < 2$$

บวก 3

$$1 < x < 5$$

$$B = (1, 5)$$

ดังนั้น $A \cap B = (3, 5)$ ซึ่ง $(3, 5) \subset (3, 6)$ **ตอบ คำตอบที่ 4**

ข้อ 12 ตอบ ตัวเลือกที่ 1

$$12(4^x) + 18(9^x) = 35(6^x)$$

$$\div 4^x : 12 + 18\left(\frac{9}{4}\right)^x = 35\left(\frac{6}{4}\right)^x$$

$$12 + 18\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 = 35\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\text{ให้ } A = \left(\frac{3}{2}\right)^x : 12 + 18A^2 = 35A$$

$$18A^2 - 35A + 12 = 0$$

$$(9A - 4)(2A - 3) = 0$$

$$A = \frac{4}{9} \quad \text{หรือ} \quad \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} \quad \text{หรือ} \quad \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \quad \text{หรือ} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^1$$

ดังนั้น $x = -2$ หรือ $x = 1$ $\therefore$ ผลบวกคำตอบ = -1

ข้อ 13 ตอบ ตัวเลือกที่ 2

$$(2^2)^{|3x-1|} - 16 = 6(2^{|3x-1|}), \text{ ให้ } A = 2^{|3x-1|}$$

$$\text{จะได้ } A^2 - 6A - 16 = 0$$

$$(A - 8)(A + 2) = 0$$

$$A = 8, -2$$

$$2^{|3x-1|} = 8, \quad \text{(-2) ใช้ไม่ได้}$$

$$|3x-1| = 3$$

$$3x-1 = 3, -3$$

$$3x = 4, -2$$

$$x = \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ ผลบวกคำตอบ } = \frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

ข้อ 16 ตอบ 0.5

$$\text{จาก } (\sqrt{2})^{\log_2 x} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\text{จากโจทย์} \quad \log_2 \left[2^{\sqrt{x}} + (2x)^{\log x} - 4^{\log 8} \right] = \sqrt{x}$$

$$2^{\sqrt{x}} + (2x)^{\log x} - (2^2)^{\log 2^3} = 2^{\sqrt{x}}$$

$$(2x)^{\log x} = 2^{6 \log 2}$$

$$\log(2x)^{\log x} = \log 2^{6 \log 2}$$

$$(\log x)(\log(2x)) = 6 \log 2(\log 2)$$

$$(\log x)(\log 2 + \log x) - 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x)^2 + (\log 2)(\log x) - 6(\log 2)^2 = 0$$

$$(\log x - 2 \log 2)(\log x + 3 \log 2) = 0$$

$$\log x = 2 \log 2, -3 \log 2$$

$$\log x = \log 2^2, \log 2^{-3}$$

$$\therefore x = 2^2, 2^{-3} = 4, \frac{1}{8}$$

$$\text{ตรวจคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่ ดังนั้น } A = \left\{ 4, \frac{1}{8} \right\}$$

$$\therefore \text{ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดใน } A \text{ คือ } 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

ข้อ 18 ตอบ 5

$$x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} \quad \text{โดย } x, y > 0$$

$$\log_2(y \cdot 3^x) = \log_2(2^y \cdot \frac{3x}{2})$$

$$y \cdot 3^x = 2^y \cdot \frac{3x}{2} \quad \text{--- (1)}$$

$$x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \frac{2y}{3}$$

$$\log_3(12^x \cdot x) = \log_3(3^y \cdot \frac{2y}{3})$$

$$(12^x \cdot x) = 3^y \cdot \frac{2y}{3} \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times (2) : \quad \cancel{y} \cdot 3^x \cdot 12^x \cdot \cancel{x} = 2^y \cdot \frac{\cancel{3x}}{2} \cdot 3^y \cdot \frac{\cancel{2y}}{3}$$

$$36^x = 6^y \rightarrow 6^{2x} = 6^y \quad \text{ดังนั้น } 2x = y$$

$$\text{แทน } y = 2x \text{ ใน (1) : } \cancel{2x} \cdot 3^x = 2^{2x} \cdot \frac{\cancel{3x}}{2}$$

$$\frac{2 \times 2}{3} = \frac{4^x}{3^x} \rightarrow \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

จะได้ $x = 1$ และ $y = 2$

แสดงว่า $A = \{(1, 2)\}$ ดังนั้น $B = \{1^2 + 2^2\} = \{5\}$

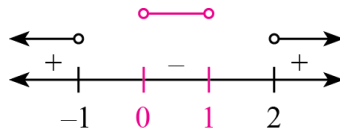
$\therefore$ ผลบวกสมาชิกภายใน $B = 5$

ข้อ 20 ตอบ ตัวเลือกที่ 2

$$A : \log_x(x+2) > 2 \text{ โดย } x > 0 \text{ และ } x \neq 1$$

$$\text{พิจารณา } 0 < x < 1 : \log_x(x+2) > 2 \rightarrow x+2 < x^2$$

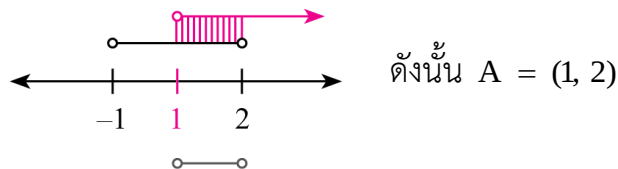
$$x^2 - x - 2 > 0 \rightarrow (x-2)(x+1) > 0$$



พบว่าไม่มีช่วงซ้ำ ดังนั้น ไม่มี x ในช่วง $(0, 1)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง

$$\text{พิจารณา } x > 1 : \log_x(x+2) > 2 \rightarrow x+2 > x^2$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$



$$B : \log_2 2^{x-1} + \log_2(2^{x+1} + 1) < \log_2(7 \cdot 2^x + 12)$$

$$\log_2(2^{x-1})(2^{x+1} + 1) < \log_2(7 \cdot 2^x + 12)$$

$$2^{2x} + 2^{x-1} < 7 \cdot 2^x + 12$$

$$\times 2 : 2(2^x)^2 + (2^x) < 14 \cdot (2^x) + 24$$

$$\text{ให้ } m = 2^x$$

$$2m^2 + m < 14m + 24 \rightarrow 2m^2 - 13m - 24 < 0$$

$$(2m+3)(m-8) < 0 \rightarrow (2 \cdot 2^x + 3)(2^x - 8) < 0$$

เนื่องจาก $2^x > 0$ เสมอ ดังนั้น $2 \cdot 2^x + 3 > 0$ เสมอ ตัดได้

$$\text{แสดงว่า } 2^x - 8 < 0 \rightarrow 2^x < 2^3 \rightarrow x < 3 \text{ ดังนั้น } B = (-\infty, 3)$$

$$\text{จะได้ว่า } A \cap B = (1, 2) \subset (1, 2] \text{ (ตัวเลือกที่ 2)}$$

ข้อ 23 ตอบ 295

จากโจทย์ a_n เป็น A.S. โดย $S_{100} = 24850$ และ $a_1 = 1$

ดังนั้น จาก $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

$$S_{100} = \frac{100}{2}[2(1) + 99d]$$

$24850 = 50[2 + 99d]$ จะได้ $d = 5$ ทำให้ $a_{50} = a_1 + 49d = 246$

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{49} \cdot a_{50}} = \frac{m}{n} \xrightarrow{\times \frac{d}{d}} \frac{1}{d} \left[\frac{d}{a_1 a_2} + \frac{d}{a_2 a_3} + \frac{d}{a_3 a_4} + \dots + \frac{d}{a_{49} a_{50}} \right] = \frac{m}{n}$$

$$\frac{1}{d} \left[\frac{a_2 - a_1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 \cdot a_3} + \frac{a_4 - a_3}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{a_{50} - a_{49}}{a_{49} \cdot a_{50}} \right] = \frac{m}{n}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{49}} - \frac{1}{a_{50}} \right]$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{5} \left[1 - \frac{1}{246} \right] \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{5} \left[\frac{245}{246} \right] \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{49}{246}$$

$\therefore m+n = 49+246 = 295$

ข้อ 24 ตอบ 52

$a_8 - a_1 = 7d \rightarrow 35 = 7d \rightarrow d = 5 \rightarrow a_n = 5n - 4$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = 3$$

นำคอนจูเกตคูณทั้งเศษและส่วนจะได้

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{a_4 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = 3$$

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d} + \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{d} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d} = 3$$

$$\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_4} - \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} = 3d$$

$\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1} = 15 \rightarrow \sqrt{5n-4} = 15+1 \rightarrow 5n-4 = 256$

$\therefore n = 52$

ข้อ 27 ตอบ 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{2} \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{2} \rightarrow (1)(2) = 3-3r$$

$$r = \frac{1}{3} \text{ จะได้ } a_n = a_1 r^{n-1} = (1) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5 \rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 5 \rightarrow \frac{b_1}{1-r} = 5 \rightarrow 7 = 5-5r$$

$$r = -\frac{2}{5} \text{ จะได้ } b_n = b_1 r^{n-1} = (7) \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}}{7 \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1}} = \frac{1}{7} \left(-\frac{5}{6} \right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{6} \right)^{n-1} = \frac{1}{7} \left[1 - \frac{5}{6} + \frac{25}{36} - \dots \dots \dots \right]$$

$$= \frac{1}{7} \left(\frac{1}{1 - (-\frac{5}{6})} \right) = \frac{6}{77}$$

ข้อ 28 ตอบ 2

$$\{a_n\} : S_n = 2a_n - 1 \text{ ———(1)}$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } n+1 : S_{n+1} = 2a_{n+1} - 1 \text{ ———(2)}$$

$$(2)-(1) : S_{n+1} - S_n = (2a_{n+1} - 1) - (2a_n - 1)$$

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n$$

$$a_{n+1} = 2a_n \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$$

แสดงว่า $\{a_n\}$ G.S. มี $r = 2$

$$\text{จาก } S_1 = 2a_1 - 1 \rightarrow a_1 = 1$$

$$\text{ดังนั้น } a_n = 2^{n-1}$$

$$\{b_n\} : b_{n+1} = 4b_n - 3n + 1$$

$$b_{n+1} - (n+1) = 4b_n - 3n + 1 - (n+1)$$

$$= 4b_n - 4n$$

$$b_{n+1} - (n+1) = 4(b_n - n)$$

$$\frac{b_{n+1} - (n+1)}{b_n - n} = 4 \quad \text{แสดงว่า } \{b_n - n\} \text{ เป็น G.S. มี } r = 4$$

และจากโจทย์ $b_1 = 2$ จะได้ $b_1 - 1 = 1$ ดังนั้น $b_n - n = 4^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{แสดงว่า } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n - n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots \quad r = \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n - n} \right) = 2$$

ข้อ 29 ตอบ 1

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2 + n)^3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3}{[n(n+1)]^3} \\
 &= \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3(n+1)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right] \\
 &= \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} \right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 1$$

ข้อ 30 ตอบ 1

จาก $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ โดย $a_1 = 1$

$$a_2 = \frac{a_1}{2a_1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2a_2 + 1} = \frac{1}{5}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2a_3 + 1} = \frac{1}{7}$$

⋮

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \text{ แทนจะได้ } \frac{1}{a_n} = 2n-1$$

และ $b_n = \frac{1}{3^n}$ ดังนั้น $\frac{b_n}{a_n} = \frac{2n-1}{3^n}$

ให้ $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots = S$ จะได้ว่า

$$S = \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots \quad \text{--- (2)}$$

$$\begin{aligned}
 (1)-(2) : \quad \frac{2}{3}S &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots \\
 \frac{2}{3}S &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right] \quad r = \frac{1}{3} \\
 \frac{2}{3}S &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right] \rightarrow S = 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots = 1$$

ข้อ 31 ตอบ 3030

$$\begin{aligned}
 \text{เนื่องจาก} \quad i + 5i^5 + 9i^9 + \dots + 2017i^{2017} &= i + 5i + 9i + \dots + 2017i \\
 &= i \left[\underbrace{1+5+9+\dots+2017}_{505 \text{ พจน์}} \right] \quad d = 4 \\
 &= i \left[\frac{505}{2} (2018) \right]
 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
 2i^2 + 6i^6 + 10i^{10} + \dots + 2018i^{2018} &= (-1) \left[\frac{505}{2} (2020) \right] \\
 3i^3 + 7i^7 + 11i^{11} + \dots + 2019i^{2019} &= (-i) \left[\frac{505}{2} (2022) \right] \\
 4i^4 + 8i^8 + 12i^{12} + \dots + 2020i^{2020} &= (1) \left[\frac{505}{2} (2024) \right]
 \end{aligned}$$

จากโจทย์

$$\begin{aligned}
 &1010 + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5 + \dots + 2020i^{2020} \\
 &= 1010 + \underbrace{\left(i \left[\frac{505}{2} (2018) \right] \right)}_{-1010i} + \underbrace{\left((-1) \left[\frac{505}{2} (2020) \right] \right)}_{+1010} + \underbrace{\left((-i) \left[\frac{505}{2} (2022) \right] \right)}_{-1010i} + \underbrace{\left((1) \left[\frac{505}{2} (2024) \right] \right)}_{+1010} \\
 &= 1010 - i(1010) + 1010 = 2020 - 1010i
 \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } a = 2020, b = -1010 \quad \therefore a - b = 2020 - (-1010) = 3030$$

ข้อ 32 ตอบ 4

ให้ $z = a + bi$

$$z - (1+i) = a + bi - 1 - i = (a-1) + (b-1)i \text{ เป็นจำนวนจินตภาพแท้}$$

$$a-1 = 0 \rightarrow \boxed{a = 1} \rightarrow z = 1 + bi$$

$$z^2 - 2(1+i)^2 = (1+bi)^2 - 2(2i) = 1 + 2bi - b^2 - 4i$$

$$= (1-b^2) + (2b-4)i \text{ เป็นจำนวนจริง } 2b-4 = 0 \rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$\therefore z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$$

ข้อ 33 ตอบ 5

ให้ $z = a + bi$ จะได้ว่า

$$(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$$

$$(2a+2bi-1)(1+i) + (a-bi+1)(1-i) = 2-2i$$

$$((2a-1)+2bi)(1+i) + ((a+1)-bi)(1-i) = 2-2i$$

$$[(2a-1-2b) + (2a-1+2b)i] + [(a+1-b) - (a+1+b)i] = 2-2i$$

$$(3a-3b) + (a+b-2)i = 2-2i$$

$$\begin{array}{lcl} \text{ดังนั้น} & \left. \begin{array}{l} 3a-3b = 2 \quad \text{---(1)} \\ a+b-2 = -2 \\ a+b = 0 \quad \text{---(2)} \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{จาก (1) และ (2) จะได้ } a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i \end{array} \end{array}$$

$$3z = 1 - i$$

$$3z+1 = 2-i$$

$$\therefore |3z+1|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

ข้อ 34 ตอบ 3

$$(\bar{z})^2 |z|^2 + 2(\bar{z})^3 + z + 2 = 0$$

$$(\bar{z})^2 (z\bar{z}) + 2(\bar{z})^3 + z + 2 = 0, |z|^2 = z\bar{z}$$

$$(\bar{z})^3 z + 2(\bar{z})^3 + z + 2 = 0$$

$$(\bar{z})^3 (z+2) + (z+2) = 0$$

$$(z+2) [(\bar{z})^3 + 1] = 0$$

กรณีที่ 1 $z+2 = 0 \rightarrow z = -2$

กรณีที่ 2 $(\bar{z})^3 + 1 = 0 \rightarrow \overline{(z^3)} = -1 \rightarrow \overline{\overline{(z^3)}} = \overline{-1}$

$$z^3 = -1 \rightarrow z = -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

ข้อ 35 ตอบ 4

เนื่องจาก $|z| = |\bar{z}|$ ดังนั้น $|z-1| = |\overline{z-1}| = |\bar{z}-1|$

และ $|z+1| = |\overline{z+1}| = |\bar{z}+1|$

จะได้ว่า $z + \frac{|\bar{z}-1|}{|z-1|} \frac{|z+1|}{|\bar{z}+1|} = z + \frac{|\bar{z}-1|}{|z-1|} \cdot \frac{|z+1|}{|\bar{z}+1|}$

$$-3+2i = z + \frac{\cancel{|z-1|} |\cancel{z+1}|}{\cancel{|z-1|} \cancel{|\bar{z}+1|}}$$

$$-3+2i = z+1$$

$$z = -4+2i$$

$$\therefore |z| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

ข้อ 36 ตอบ 4

ให้ $z = a + bi$

$$|z+1| = |z+i| \rightarrow |a+bi+1| = |a+bi+i| \rightarrow |(a+1)+bi| = |a+(b+1)i|$$

$$|(a+1)+bi|^2 = |a+(b+1)i|^2 \rightarrow (a+1)^2 + b^2 = a^2 + (b+1)^2$$

$$a^2 + 2a+1+b^2 = a^2 + b^2 + 2b+1 \rightarrow a = b \text{ ดังนั้น } z = a+bi = a+ai$$

$$|z-2+i| = |z+2-2i| \rightarrow |a+ai-2+i| = |a+ai+2-2i|$$

$$|(a-2)+(a+1)i| = |(a+2)+(a-2)i|$$

$$|(a-2)+(a+1)i|^2 = |(a+2)+(a-2)i|^2$$

$$(a-2)^2 + (a+1)^2 = (a+2)^2 + (a-2)^2$$

$$a^2 + 2a+1 = a^2 + 4a+4 \rightarrow a = -\frac{3}{2} \rightarrow z = a+ai = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\therefore |2z|^2 = \left| 2\left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right) \right|^2 = |-3-3i|^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 18$$

ข้อ 37 ตอบ 1553

$$z_1 = \left(1 - \frac{1}{1+i}\right)^{2020} = \left(1 - \frac{(1-i)}{2}\right)^{2020}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^{2020} \begin{cases} r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta \in Q_1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$z_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right]^{2020} \rightarrow z_1 = \frac{1}{2^{1010}} \operatorname{cis} 505\pi$$

$$z_1 = \frac{1}{2^{1010}} (\cos 505\pi + i \sin 505\pi) \rightarrow z_1 = -\frac{1}{2^{1010}}$$

$$z_2 = \left(\frac{5+3\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}\right)^{543} = \left(\frac{-13+13\sqrt{3}i}{13}\right)^{543}$$

$$= (-1+\sqrt{3}i)^{543} \begin{cases} r = 2 \\ \theta \in Q_2 \rightarrow \tan \theta = -\sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_2 = \left(2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right)^{543} = 2^{543} \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3}(543)\right)$$

$$z_2 = 2^{543} \operatorname{cis}(362\pi) \rightarrow z_2 = 2^{543} (\cos 362\pi + i \sin 362\pi)$$

$$z_2 = 2^{543}$$

ดังนั้น $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2^{543}}{-\frac{1}{2^{1010}}} \rightarrow \frac{z_2}{z_1} = -2^{1553} \rightarrow \frac{z_2}{z_1} + 2^{1553} = 0$

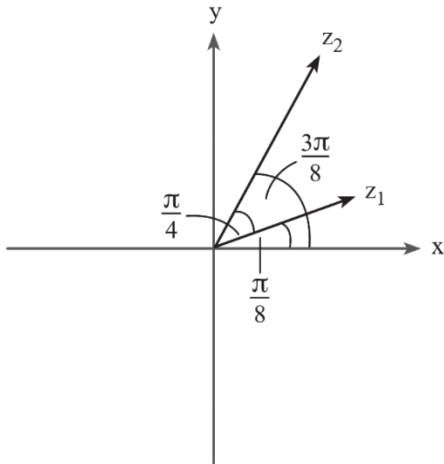
$$\therefore n = 1553$$

ข้อ 38 ตอบ 1

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{8} \rightarrow |z_1| = \sqrt{2}, \operatorname{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{8}$$

$$z_2 = 3 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8} \rightarrow |z_2| = 3, \operatorname{Arg}(z_2) = \frac{3\pi}{8}$$

มุมระหว่าง z_1 และ z_2 คือ $\frac{\pi}{4}$



จากความรู้เรื่องเวกเตอร์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos \frac{\pi}{4} \\ &= (\sqrt{2})^2 + (3)^2 - 2(\sqrt{2})(3)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 2 + 9 - 6 = 5$$

$$\therefore |z_1 - z_2| = \sqrt{5}$$

ข้อ 39 ตอบ 5

โจทย์กำหนด $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 5 = 0$

มี $1+2i$ เป็นคำตอบของสมการ จากทฤษฎีบทคู่คอนจูเกตจะได้ว่า $1-2i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย และเนื่องจากสัมประสิทธิ์หน้า x^4 เท่ากับ 1 ทำให้ทราบว่าคำตอบที่เหลืออีก 2 คำตอบต้องเป็นจำนวนเต็มแน่นอน

ให้คำตอบที่เหลือมีค่าเป็น m และ n

จากสูตรของวิตจะได้ว่า $(1+2i)(1-2i)(m)(n) = -5$

$$(5)(m)(n) = -5$$

$$(m)(n) = -1$$

จะได้ว่า $m = 1, n = -1$ จากทฤษฎีบทตัวประกอบจะได้ว่า

$$P(x) = [x - (1+2i)][x - (1-2i)](x-1)(x+1)$$

$$\therefore P(2) = [2 - (1+2i)][2 - (1-2i)](2-1)(2+1)$$

$$= (1-2i)(1+2i)(1)(3) = (5)(1)(3) = 15$$

ข้อ 40 ตอบ 41

$$z^4 - z^3 - 2z^2 + 6z - 4 = 0 \rightarrow z^4 - z^3 - 2z^2 + 2z + 4z - 4 = 0$$

$$z^3(z-1) - 2z(z-1) + 4(z-1) = 0 \rightarrow (z-1)(z^3 - 2z + 4) = 0$$

พิจารณา $z^3 - 2z + 4 = 0$

เมื่อแทน $z = -2$ ในสมการพบว่าสมการเป็นจริง ดังนั้น $z+2$ เป็นตัวประกอบของ $z^3 - 2z + 4 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 1 & 0 & -2 & 4 \\
 & & -2 & 4 & -4 \\
 \hline
 & 1 & -2 & 2 & 0
 \end{array}$$

จะได้ว่า $z^3 - 2z + 4 = (z+2)(z^2 - 2z + 2) = 0$

ดังนั้น $(z-1)(z^3 - 2z + 4) = (z-1)(z+2)(z^2 - 2z + 2) = 0$

แสดงว่า $z-1 = 0 \rightarrow z = 1$

$z+2 = 0 \rightarrow z = -2$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2} \rightarrow z = 1 \pm i$$

ดังนั้น $z_1 = 1, z_2 = -2, z_3 = 1+i, z_4 = 1-i$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า } \left(\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} + \frac{1}{z_4^2} \right)^2 &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{(-2)^2} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1-i)^2} \right)^2 \\
 &= \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2i} + \frac{1}{-2i} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{5}{4} \right)^2 = \frac{25}{16} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$\therefore m+n = 25+16 = 41$
