

เฉลยโจทย์ โครงการเพิ่มพูนศักยภาพทางคณิตศาสตร์เพื่อการแข่งขัน

ข้อ 5 ตอบ 2,515

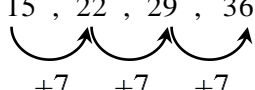
$$\begin{aligned}
 2^{22} + 1 &= [(2^{11})^2 + 2(2^{11})(1) + 1] - 2(2^{11})(1) \\
 &= (2^{11} + 1)^2 - (2^6)^2 \\
 &= (2^{11} + 1 - 2^6)(2^{11} + 1 + 2^6) \\
 &= (2048 + 1 - 64)(2048 + 1 + 64) \\
 &= (1985)(2113) = (5)(397)(2113)
 \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c = 5 + 397 + 2113 = 2,515$$

ข้อ 11 ตอบ 777

จาก $P(1) = 15$, $P(2) = 22$, $P(3) = 29$, $P(4) = 36$, $P(5) = 43$, $P(6) = 50$

พิจารณา $15, 22, 29, 36, 43, 50, \dots$ ดังนั้นรูปทั่วไปคือ $\boxed{7x + 8}$



$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + (7x+8)$$

$$\therefore P(7) = (6)(5)(4)(3)(2)(1) + 7(7) + 8 = 777$$

ข้อ 12 ตอบ 9

สมมุติ $\begin{cases} \text{อู๋ม} \\ \text{อิม} \end{cases}$ ชนะ x ครั้ง , แพ้ y ครั้ง $\rightarrow 5x - 2y = 37$ ——(1)

$\begin{cases} \text{อิม} \\ \text{อู๋ม} \end{cases}$ ชนะ y ครั้ง , แพ้ x ครั้ง $\rightarrow 5y - 2x = 2$ ——(2)

$$(1) \times 5, 25x - 10y = 185 \text{ ——}(3)$$

$$(2) \times 2, 10y - 4x = 4 \text{ ——}(4)$$

$$(3) + (4), 21x = 189 \quad \therefore x = 9$$

ข้อ 13 ตอบ 4

สมมติปัจจุบัน ลูก อายุ x ปี จะได้ว่า

	T ปีก่อน	ปัจจุบัน	T ปีข้างหน้า
อายุลูก	$x - T$	x	$x + T$
อายุพ่อ + แม่	$14x - 2T$	$14x$	$14x + 2T$

T ปีก่อน สมการคือ $14x - 2T = 26(x - T)$

$$14x - 2T = 26x - 26T$$

$$\boxed{x = 2T}$$

T ปีข้างหน้า $\frac{\text{อายุพ่อ + แม่}}{\text{อายุลูก}} = \frac{14x + 2T}{x + T} = \frac{14(2T) + 2T}{2T + T}$
 $= \frac{30T}{3T} = 10$

ข้อ 14 ตอบ 4

กราฟสัมผัสกัน แปลว่า เกิด 1 จุดตัด \rightarrow แก่สมการจะมี 1 คำตอบ

กรณี 1 $y = ax$ —(1)

$y = 20x^2 + 18x + 5$ —(2)

จะได้ $20x^2 + 18x + 5 = ax$

$$20x^2 + (18 - a)x + 5 = 0$$

จะมี 1 คำตอบ เมื่อ $(18 - a)^2 - 4(20)(5) = 0$

$$(a - 18)^2 = 20^2$$

$$a - 18 = 20, -20$$

$$\boxed{\therefore a = 38, -2}$$

กรณี 2 $y = bx$ กับ $y = 20x^2 + 18x + 5$

จะแก้ได้เช่นเดียวกับ กรณี 1 คือ $b = 38, -2$

โจทย์กำหนด $a > b$ $\therefore a = 38, b = -2$

เมื่อนำไปแทนแล้วพบว่า ตัวเลือกข้อ 4 เป็นจริง

ข้อ 15 ตอบ 1

จาก $\cos A + \cos^2 A = 1$ {

$\cos A = 1 - \cos^2 A$

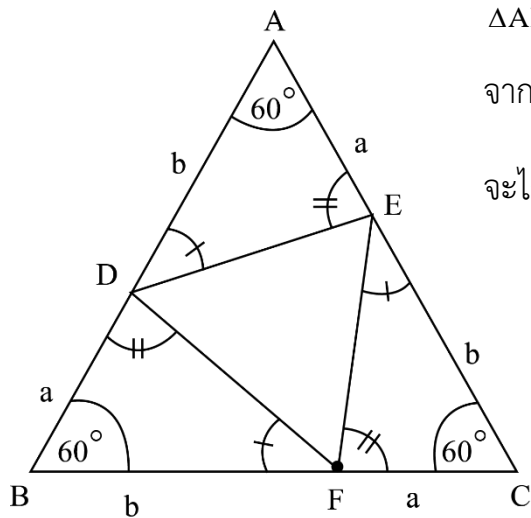
$\cos A = \sin^2 A$ — (1)

$\cos^2 A = 1 - \cos A$

$\cos^2 A = 1 - \cos A$ — (2)

$$\begin{aligned}
 \therefore 5 \sin^{12} A + 8 \sin^{10} A &= 5(\sin^2 A)^6 + 8(\sin^2 A)^5 \\
 &= 5 \cos^6 A + 8 \cos^5 A = \cos^4 A (5 \cos^2 A + 8 \cos A) \\
 &= (1 - \cos A)^2 [5(1 - \cos A) + 8 \cos A] \\
 &= (1 - 2 \cos A + \cos^2 A)(5 + 3 \cos A) \\
 &= (1 - 2 \cos A + 1 - \cos A)(5 + 3 \cos A) \\
 &= (2 - 3 \cos A)(5 + 3 \cos A) = 10 - 9 \cos A - 9 \cos^2 A \\
 &= 10 - 9(\cos A + \cos^2 A) = 10 - 9(1) = 1
 \end{aligned}$$

ข้อ 19 ตอบ $5 - 2\sqrt{6}$



$\triangle ADE \cong \triangle CEF \cong \triangle BFD$

จากโจทย์ $[\triangle DEF] = \frac{3}{4}[\triangle ABC]$

จะได้ $[\triangle CEF] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} [\triangle ABC] \right)$

$$\frac{1}{2} ab \sin 60^\circ = \frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (a+b)^2 \right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} ab = \frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (a+b)^2 \right)$$

$$12ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - 10ab + b^2 = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{10ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{0}{b^2}$$

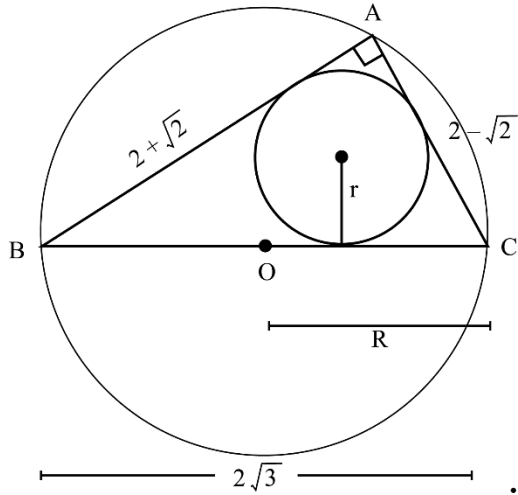
$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 10 \left(\frac{a}{b} \right) + 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4}}{2} = 5 \pm \sqrt{24}$$

$\therefore \frac{a}{b} = 5 - 2\sqrt{6}$, $5 + 2\sqrt{6}$ ใช้ไม่ได้
 เพราะโจทย์บอก $a < b$

ข้อ 20 ตอบ 4

$$\because (2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2$$



$\therefore \triangle ABC$ เป็น \triangle มุมฉาก

จากรูป $R = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ หน่วย

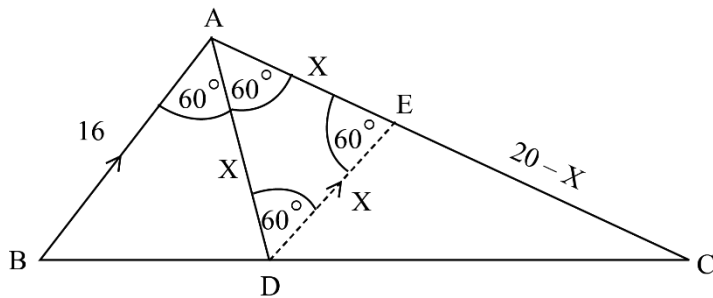
$$r = \frac{2(\text{พ.ท. } \triangle ABC)}{\text{เส้นรอบรูป } \triangle ABC}$$

$$r = \frac{2\left(\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right)}{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+2\sqrt{3}} = \frac{4-2}{4+2\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{3}(2+\sqrt{3}) = 3+2\sqrt{3}$$

ข้อ 21 ตอบ 2



ลาก $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

สมมติ $AD = x$

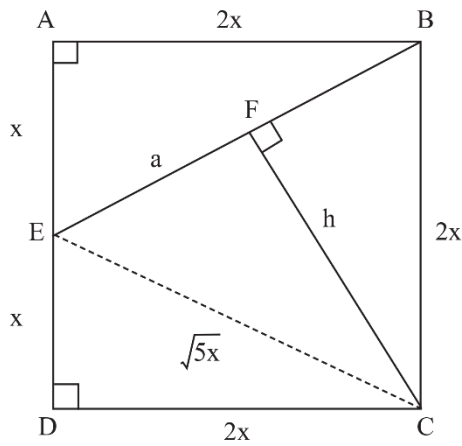
จะได้ $\triangle ADE$ เป็น \triangle ด้านเท่า

$$\triangle CED \sim \triangle CAB$$

$$\frac{x}{16} = \frac{20-x}{20}$$

$$\therefore x = \frac{80}{9}$$

ข้อ 22 ตอบ 100



สมมุติ $AB = 2x$, $EF = a$, $CF = h$

$$EC = AB = \sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5x}$$

$$[\triangle BEC] = \frac{1}{2}(\sqrt{5x})h = \frac{1}{2}(2x)(2x)$$

$$\therefore h = \frac{4x}{\sqrt{5}}$$

จาก $\triangle CEF$, $a^2 = (\sqrt{5x})^2 - h^2$

$$a^2 = 5x^2 - \left(\frac{4x}{\sqrt{5}}\right)^2 = 5x^2 - \frac{16x^2}{5}$$

$$a^2 = \frac{9}{5}x^2 \rightarrow \therefore a = \frac{3}{\sqrt{5}}x$$

จาก $[\square DEFC] = [\triangle DEC] + [\triangle EFC]$

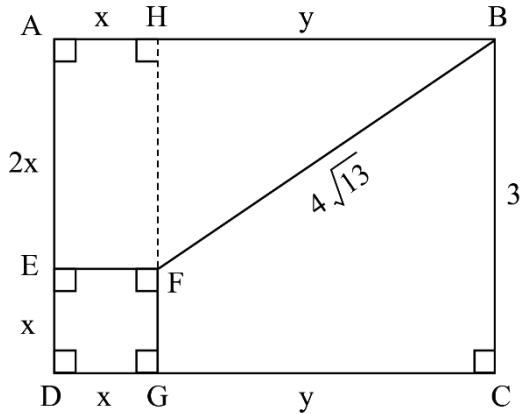
$$55 = \frac{1}{2}(x)(2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x\right)\left(\frac{4}{\sqrt{5}}x\right)$$

$$55 = x^2 + \frac{6}{5}x^2$$

$$x^2 = 25$$

$\therefore [\square ABCD] = 4x^2 = 4(25) = 100$ ตารางหน่วย

ข้อ 23 ตอบ 56



สมมุติ $DE = x$, $AE = 2x$, $BH = y$

พ.ท. $\square BAEF = 80$

$$\frac{1}{2}(2x + y)(2x) = 80$$

$$\boxed{y = \frac{80}{x} - 2x} \quad \text{--- (1)}$$

จาก $\triangle BHF$, $(2x)^2 + y^2 = (4\sqrt{13})^2$

$$4x^2 + \left(\frac{80}{x} - 2x\right)^2 = 16(13)$$

$$4x^2 + \frac{6400}{x^2} - 320 + 4x^2 = 16(13)$$

$$\frac{800}{x^2} - 40 + x^2 = 26$$

$$x^4 - 66x^2 + 800 = 0$$

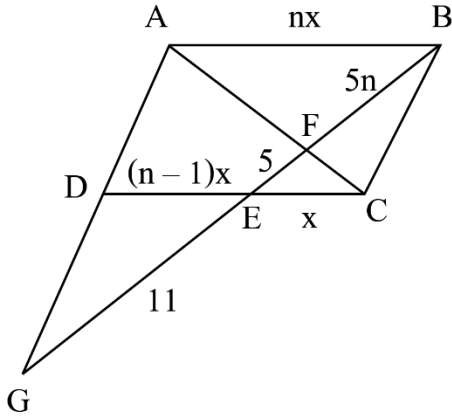
$$(x^2 - 16)(x^2 - 50) = 0$$

$$x^2 = 16, \quad \text{50} \quad \text{ใช้ไม่ได้ เพราะ } x \text{ ต้องเป็น}$$

$\therefore x = 4$, แทนใน (1) ได้ $y = 12$ จำนวนตรรกยะ

\therefore ความยาวรอบรูป $\square ABCD = 56$

ข้อ 24 ตอบ 16



สมมุติ $EC = x$, $AB = n(x)$

$$\triangle ABF \sim \triangle CEF \quad \therefore BF = 5n$$

$$\triangle GDE \sim \triangle BCE$$

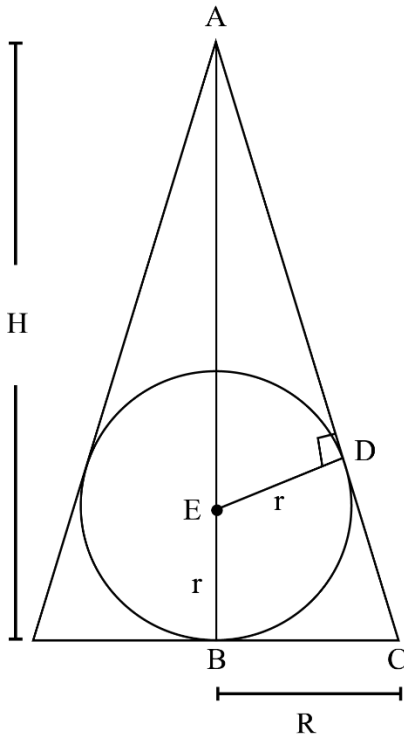
$$\frac{(n-1)x}{x} = \frac{11}{5+5n}$$

$$(n-1)(5)(n+1) = 11$$

$$n^2 - 1 = \frac{11}{5}$$

$$\therefore 5n^2 = 16$$

ข้อ 27 ตอบ 3



$$\text{จาก } \frac{r}{R} = \frac{3}{5} \rightarrow R = \frac{5}{3}r$$

$$AC = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}r\right)^2 + H^2}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{H-r}{AC}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{H-r}{\sqrt{\frac{25}{9}r^2 + H^2}}$$

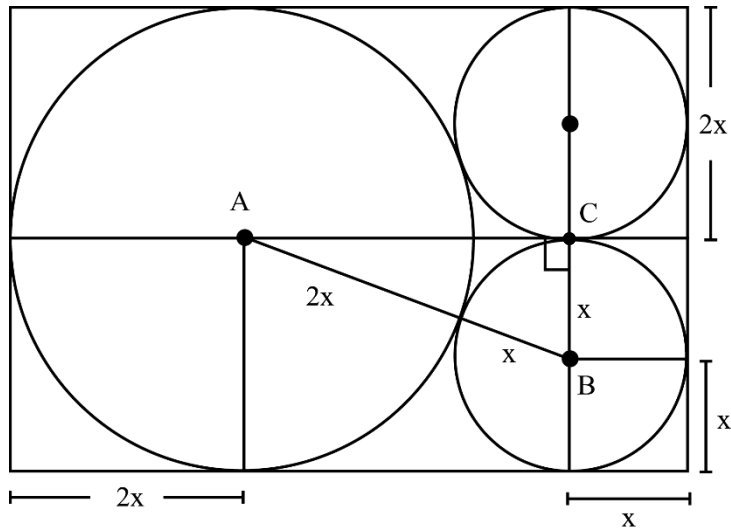
$$\frac{25}{9}r^2 + H^2 = \frac{25}{9}(H-r)^2$$

$$\frac{25}{9}r^2 + H^2 = \frac{25}{9}H^2 - \frac{25}{9}(2Hr) + \frac{25}{9}r^2$$

$$\frac{50}{9}Hr = \frac{16}{9}H^2$$

$$\therefore \frac{r}{H} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$

ข้อ 28 ตอบ 2



สมมติ รัศมีวงเล็ก = x

รัศมีวงใหญ่ = $2x$

จะได้ด้านกว้างของ □ = $4x$

จาก $\triangle ABC$, $AC^2 = (3x)^2 - x^2$

$\therefore AC = \sqrt{8x}$

จะได้ด้านยาวของ □ = $(3 + \sqrt{8})x$

$\therefore \frac{\text{กว้าง}}{\text{ยาว}} = \frac{4x}{(3 + \sqrt{8})x} = \frac{4(3 - \sqrt{8})}{9 - 8} = 12 - 4\sqrt{8} = 12 - 8\sqrt{2}$
