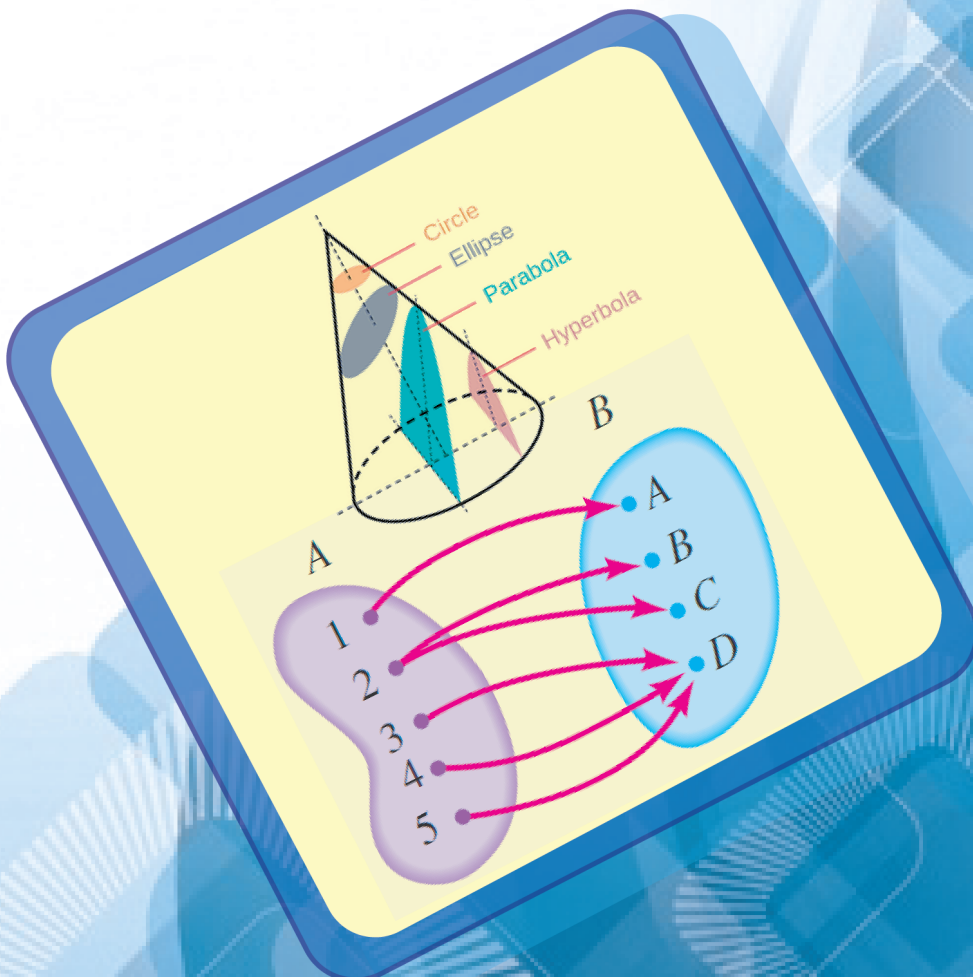


**ติวฟิต
กับ WE Fight for Final exam**

วิชา คณิตศาสตร์

ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

ภาคตัดกรวย



ติวสอบ เรื่อง ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

1. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{5x + 4}\}$

และ $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2 - 5x\}$

แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(x)$ ตรงกับข้อใด

1. $4 - x^2$

2. $6 - x^2, x \geq 0$

3. $x^2 - 4, x \geq 0$

4. $\sqrt{14 - 25x}$

2. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3 - 5x}{2}$ และ $g^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{3}$

แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(4)$ ตรงกับข้อใด

1. -3

2. -2

3. -1

4. 0

3. กำหนดให้ $f(x - 2) = 4 - x$ และ $g(-x) = 2x + 1$
แล้วค่าของ $f \circ g(x + 1)$ ตรงกับข้อใด

1. $-2x - 1$

2. $-2x + 1$

3. $2x + 3$

4. $2x + 5$

4. กำหนดให้ $f(x) = 3x + 2$ และ $g(x) = -|x - 2| + 1$
แล้วเรนจ์ของ $g \circ f$ ตรงกับข้อใด

1. $[0, \infty)$

2. $(-\infty, 0]$

3. $(-\infty, 1]$

4. $(-\infty, -1]$

5. กำหนดให้ $(g \circ f)(x) = -4x^2 + 5$ และ $g(x) = 2x - 1$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, 0)$

ข. $(f \circ g)(x) = -8x^2 + 8x + 1$

ข้อใดถูกต้อง

1. ก. ถูก แต่ ข. ผิด

2. ก. ผิด แต่ ข. ถูก

3. ก. ถูก และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

6. กำหนด $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$ และ $g^{-1}(x) = 3 - \frac{1}{x}$

แล้วค่าของ $(g \circ f)^{-1}(1)$ ตรงกับข้อใด

1. $-\frac{1}{2}$

2. $-\frac{1}{3}$

3. 1

4. $\frac{2}{3}$

7. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$ และ $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_{g \circ f} = (-\infty, 2]$

ข. $R_{g \circ f} = [2, \infty)$

ค. $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

ง. $R_{f \circ g} = [0, \sqrt{2}]$

ข้อความด้านบนนี้ถูกต้องกี่ข้อความ

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4

8. กำหนดให้ $f(x) = 5x - 9$, $g(x) = 4 - 3x$ และ $h(x) = \frac{x^3 + 11}{3}$
แล้วค่าของ $((g \cdot h^{-1}) \circ f)(2)$ ตรงกับข้อใด
1. -2 2. -1 3. 1 4. 2

9. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ และ $g(x) = |x-2| + 3$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $(f \circ g)(-1) = 0.5$

2. $(f - g)(6) = -6.5$

3. g เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(2, \infty)$

4. $\left(\frac{g}{f-1}\right)(1) = 2$

10. กำหนดให้ $f(x + 3) = 2x + 1$, $g(x) = \frac{2}{x}$

และ $h^{-1} = f \cdot g$ แล้วค่าของ $h(2 - x)$ ตรงกับข้อใด

1. $\frac{10}{x - 4}$

2. $\frac{-10}{x + 4}$

3. $\frac{10}{x + 2}$

4. $\frac{-10}{2 - x}$

11. กำหนดให้ $f = \{(x, y)/y = \sqrt{x^2 - 1}\}$, $g = \{(x, y)/y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\}$

และ $h = \{(x, y)/y = \frac{x + 1}{x - 4}\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f \circ g = \{(x, y)/y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\}$

2. $D_{f \circ g} = [1, \infty)$

3. $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(1, \infty)$

4. $D_{\frac{f}{h}} = (-\infty, -1] \cup [1, 4) \cup (4, \infty)$

12. ร้านขายขนมปังแห่งหนึ่งสามารถผลิตขนมปังได้ไม่เกินวันละ 60 ก้อน โดยมีต้นทุนการผลิตขนมปังก้อนละ 20 บาท และมีค่าใช้จ่ายประจำคงที่ เช่น ค่าจ้างคนงาน ค่าเช่าที่เท่ากับ 1,600 บาทต่อวัน ร้านแห่งนี้ตั้งราคาขายขนมปังก้อนละ $140 - 2x$ บาท เมื่อ x แทนจำนวนขนมปังที่ผลิตในแต่ละวัน (ก้อน) ร้านขายขนมปังแห่งนี้ต้องผลิตขนมปังวันละกี่ก้อนจึงจะได้กำไรสูงสุด
1. 30 2. 40 3. 50 4. 60

13. ชายคนหนึ่งโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศตามแนวดิ่ง ถ้าความสูงจากพื้นดินของลูกบอลมีหน่วยเป็นฟุต ซึ่งหาได้จาก $f(x) = 3 + 2x - x^2$ เมื่อ x แทนระยะเวลานับตั้งแต่เริ่มโยนลูกบอลมีหน่วยเป็นวินาที
- พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. เมื่อเวลาผ่านไป $\frac{1}{2}$ วินาที ลูกบอลจะอยู่ที่จุดสูงที่สุดจากพื้นดิน
 - ข. ลูกบอลจะสูงจากพื้นดินได้สูงที่สุด 4 ฟุต
 - ค. เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที ลูกบอลจะอยู่สูงจากพื้นดินในระดับเดียวกับเมื่อเริ่มต้นโยน
 - ง. เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที ลูกบอลจะตกถึงพื้นดิน
- จากข้อความข้างต้นมีข้อความที่ถูกต้องกี่ข้อความ
1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

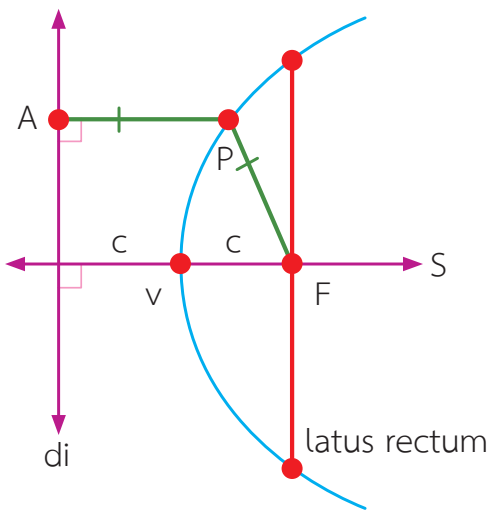
14. นาย ก. เปิดหอพักให้บริการจำนวน 50 ห้อง โดยปัจจุบันมีผู้เช่าเพียง 20 ห้อง โดยคิดค่าเช่าห้องละ 2,000 บาทต่อเดือน ถ้านาย ก. ลดค่าเช่าลงก็จะมีผู้เช่าเพิ่มขึ้น 2 ห้องต่อทุก 50 บาทที่ลดลง แล้วนาย ก. ควรคิดค่าเช่าเดือนละเท่าใด เขาจึงจะมีรายรับจากค่าเช่ามากที่สุด
1. 1,000 2. 1,200 3. 1,250 4. 1,500

ตัวอย่าง เรื่อง ภาคตัดกรวย

พาราโบลา (parabola)

นิยาม

พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่ง และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่ คือ จุดโฟกัสของพาราโบลา และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ คือ เส้นไดเรกทริกซ์ (directrix)



สรุป จากนิยามพาราโบลา $PF =$ ระยะจาก P ไปยัง di

- ระยะจากจุดยอด (v) ไปยังจุดโฟกัส (F) = c
- **เลตัสเรกตัม (Latus rectum)** คือ คอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา ความยาวของเลตัสเรกตัม = $|4c|$

สมการพาราโบลารูปมาตรฐาน

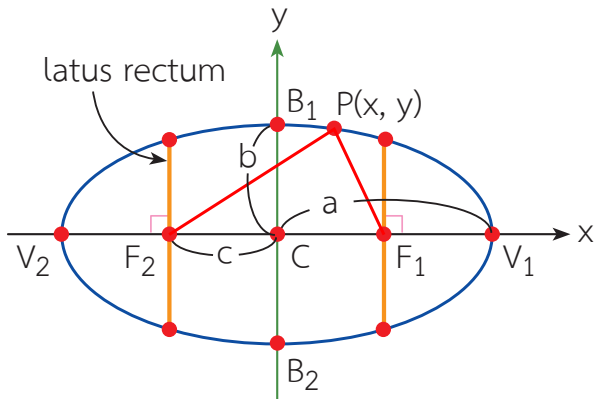
เมื่อจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) และ $c > 0$

<p>$(x - h)^2 = +4c(y - k)$</p>	<p>$(x - h)^2 = -4c(y - k)$</p>	แกนสมมาตรขนานแกน y
<p>$(y - k)^2 = +4c(x - h)$</p>	<p>$(y - k)^2 = -4c(x - h)$</p>	พาราโบลาเปิดตามแกน y
<p>แกนสมมาตรขนานแกน x</p>		พาราโบลาเปิดตามแกน x

วงรี (ellipse)

นิยาม

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับสองจุดที่มีค่าคงตัวเสมอ โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้ง 2 จุดเสมอ และจะเรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดว่า จุดโฟกัสของวงรี



สรุป จากนิยามของวงรี $PF_1 + PF_2 = 2a$

- แกนเอกยาว = $2a$
- แกนโทยาว = $2b$
- ความสัมพันธ์ระหว่าง a , b และ c คือ $a^2 = b^2 + c^2$
- ความยาวเลตัสเรกตัม = $\frac{2b^2}{a}$

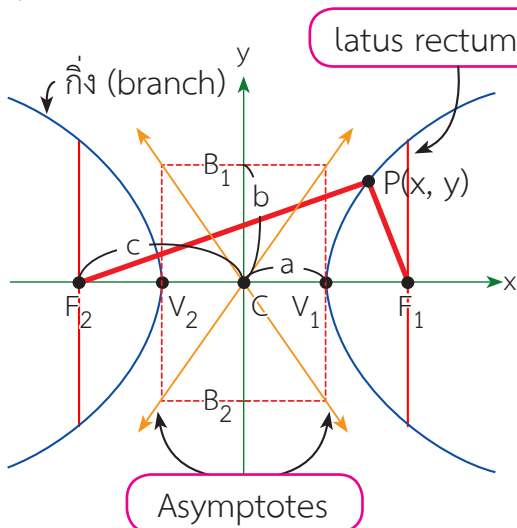
สมการวงรีในรูปมาตรฐาน

จุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)	
สมการวงรีรูปมาตรฐาน	
$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$

ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)

นิยาม

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะจากจุดใดๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัวเสมอ โดยเรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา



สรุป จากนิยามของไฮเพอร์โบลา $|PF_1 - PF_2| = 2a$

- แกนตามขวางยาว = $2a$
- แกนสังยุคยาว = $2b$
- ความสัมพันธ์ระหว่าง a , b และ c คือ $c^2 = a^2 + b^2$
- ความยาวเลตัสเรกตัม = $\frac{2b^2}{a}$

สมการไฮเพอร์โบลารูปมาตรฐาน

จุดศูนย์กลางที่จุด (h, k)	
สมการไฮเพอร์โบลารูปมาตรฐาน	
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
สมการเส้นกำกับ(Asymptotes)	
$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

PROBLEMS

15. ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(2, 3)$ โดยที่แกนของพาราโบลานานแกน Y และพาราโบลารูปนี้ผ่านจุด $(4, 5)$ แล้วสมการเส้นโคจรทริกซ์ของพาราโบลาดตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x = \frac{3}{2}$

2. $x = \frac{5}{2}$

3. $y = \frac{3}{2}$

4. $y = 2$

5. $y = \frac{5}{2}$

16. สมการของวงรีมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ โดยมีผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ บนวงรีไปยังจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 10 หน่วย ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $16x^2 + 25y^2 + 400 = 0$

2. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$

3. $9x^2 + 25y^2 + 225 = 0$

4. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

5. $25x^2 + 9y^2 + 225 = 0$

17. ให้วงรีรูปหนึ่งมีแกนเอกขนานแกน Y และมีแกนโทยาวเท่ากับความยาวเลตส์เรกตัมของพาราโบลา
ที่มีสมการเป็น $y^2 - 6x + 6y + 15 = 0$ ถ้าวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดยอดของพาราโบลาและผ่านจุด (1, 2)
แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของวงรี

1. $\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{25} = 1$

2. $\frac{(x + 1)^2}{36} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$

3. $\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{25} = 1$

4. $\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$

5. $\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{36} = 1$

18. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรีที่มีสมการเป็น

$$16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y - 311 = 0$$

และมีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(2, 1)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $y^2 - 4x + 8y - 14 = 0$

2. $y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$

3. $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$

4. $x^2 + 2x + 8y - 15 = 0$

5. $x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$

19. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด $(-4, 3)$ และ $(4, 3)$ มีค่าคงที่เท่ากับ 6 หน่วย พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- (ก) สมการไฮเพอร์โบลา H คือ $7x^2 - 9(y - 3)^2 = 63$
 - (ข) เส้นกำกับ (asymptotes) ของไฮเพอร์โบลาทั้งสองเส้นตัดกันที่จุด $(0, 3)$
 - (ค) แกนสังยุคของไฮเพอร์โบลายาวเท่ากับ $\sqrt{14}$ หน่วย
 - (ง) จุดยอดของไฮเพอร์โบลา คือ $(3, 1)$ และ $(3, -1)$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องมีทั้งหมดกี่ข้อความ

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูกต้อง)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

20. กำหนดให้เส้นตรง $5x - 4y - 15 = 0$ และ $x + y = 12$ ตัดกันที่จุด A
ถ้าไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $4y^2 - 9x^2 + 18x - 16y = 29$
มีจุดยอดอยู่ที่จุด B และจุด C แล้วพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับเท่าใด

21. กำหนดให้จุด F เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $6x^2 - 10y^2 - 12x - 40y - 94 = 0$ ที่อยู่ในควอดรันต์ (quadrant) ที่ 4 ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ F และมีแกนสมมาตรของไฮเพอร์โบลาเป็นเส้นไดเรกทริกซ์ แล้วสมการพาราโบลารูปนี้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. $y^2 + 4y - 4x - 9 = 0$
 2. $y^2 + 4y - 16x + 84 = 0$
 3. $y^2 + 4y - 16x - 44 = 0$
 4. $x^2 - 6x - 4y - 7 = 0$
 5. $x^2 - 6x - 4y + 1 = 0$



TUTORIAL SCHOOL BY
THE BRAIN



www.WeByTheBrain.com