ติว PAT 1 และคณิตศาสตร์ 1 วิชาสามัญ
เฉลยโจทย์ในเอกสารประกอบการเรียน

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

ข้อ 1 <u>ตอบ</u> 4

ข้อ 2 <u>ตอบ</u> 5

$$\frac{1}{\log_2 100}+\frac{1}{\log_5 100} = \log_{100}2+\log_{100}5 = \log_{100}(2\times 5)$$

$$= \log_{10^2}10 = \frac{1}{2}$$

ข้อ 3 <u>ตอบ</u> 2

ข้อ 4 <u>ตอบ</u> 2

$(2^2)^{|3x-1|}-16 = 6(2^{|3x-1|})$, ให้ $A = 2^{|3x-1|}$

จะได้
$$\begin{aligned} A^2-6A-16 &= 0 \\ (A-8)(A+2) &= 0 \\ A &= 8, -2 \\ 2^{|3x-1|} &= 8, -2 \quad \text{ใช้ไม่ได้} \\ |3x-1| &= 3 \\ 3x-1 &= 3, -3 \\ 3x &= 4, -2 \\ x &= \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\therefore$ ผลบวกคำตอบ $= \frac{4}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

ข้อ 5 **<u>ตอบ</u>** 3

$$\frac{1}{1+\log_{a^2b}\left(\frac{c}{a}\right)}+\frac{1}{1+\log_{b^2c}\left(\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{1+\log_{c^2a}\left(\frac{b}{c}\right)}$$

$$= \frac{1}{\log_{a^2b}(a^2b)+\log_{a^2b}\left(\frac{c}{a}\right)}+\frac{1}{\log_{b^2c}(b^2c)+\log_{b^2c}\left(\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{\log_{c^2a}(c^2a)+\log_{c^2a}\left(\frac{b}{c}\right)}$$

$$= \frac{1}{\log_{a^2b}(abc)}+\frac{1}{\log_{b^2c}(abc)}+\frac{1}{\log_{c^2a}(abc)}$$

$$= \log_{abc}(a^2b)+\log_{abc}(b^2c)+\log_{abc}(c^2a) = \log_{abc}(abc)^3 = 3$$

ข้อ 6 **<u>ตอบ</u>** 9

$$(\log_3 9+\log_3 x)^2-3\log_{3^{\frac{1}{2}}} x-7 = 0$$

$$(2+\log_3 x)^2-6\log_3 x-7 = 0$$

$$(4+4\log_3 x+(\log_3 x)^2)-6\log_3 x-7 = 0$$

$$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-3 = 0$$

$$(\log_3 x-3)(\log_3 x+1) = 0$$

$$\log_3 x = 3, -1$$

$$x = 3^3, 3^{-1}$$

$x = 27, \frac{1}{3}$ ตรวจคำตอบแล้วใช้ได้ทั้งคู่

ดังนั้น $A = \left\{27, \frac{1}{3}\right\}$

$\therefore$ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดใน A คือ $27\times\frac{1}{3} = 9$

ข้อ 7 **<u>ตอบ</u>** 1

ข้อ 8 **<u>ตอบ</u>** 125

ให้ $A = 2^x, B = \log_5 y$

จาก $2^x \log_5 y = 4\log_{5^2} 5 + 2^{2x}$

$2^x \log_5 y = 2+2^{2x} \rightarrow AB = 2+A^2$ ——(1)

จาก $2^x \log_5 y^3 = (\log_5 y)^2 + 9$

$2^x(3\log_5 y) = (\log_5 y)^2 + 9 \rightarrow 3AB = B^2 + 9$ ——(2)

จาก (1) , $B = \frac{2+A^2}{A} \rightarrow B = \frac{2}{A}+A$ ——(3)

แทน (3) ใน (2) จะได้ $3A\left(\frac{2}{A}+A\right) = \left(\frac{2}{A}+A\right)^2 + 9$

$$6+3A^2 = \frac{4}{A^2}+4+A^2+9$$

$$2A^2-7-\frac{4}{A^2} = 0$$

$$2A^4-7A^2-4 = 0$$

$$(2A^2+1)(A^2-4) = 0$$

ใช้ไม่ได้

$$A^2 = -\frac{1}{2}, 4$$

$$A = 2, -2$$

ใช้ไม่ได้

$$2^x = 2, -2$$

ดังนั้น $x = 1$

แทน A = 2 ใน (3) , $B = \frac{2}{2}+2 = 3$

$\log_5 y = 3 \rightarrow y = 5^3 = 125$ $\quad\therefore\ xy = (1)(125) = 125$

จะได้ B = {125} $\therefore$ ค่ามากสุดของสมาชิกใน B คือ 125

ข้อ 9 <u>**ตอบ**</u> 1

$$\log_2 (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-16} < \log_2 (2+\sqrt{3})$$

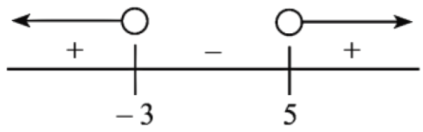
$$(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-16} < (2+\sqrt{3}) \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} 2+\sqrt{3}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} &= \frac{4-3}{2-\sqrt{3}} \\ &= (2-\sqrt{3})^{-1} \end{aligned}}$$

$$(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-16} < (2-\sqrt{3})^{-1}$$

$$x^2-2x-16 > -1$$

$$x^2-2x-15 > 0$$

$$(x-5)(x+3) > 0$$



$$\therefore\ A = (-\infty,-3)\cup(5,\infty)$$

$\therefore$ พบว่า A เป็นสับเซตของตัวเลือกข้อ 1

ข้อ 10 <u>**ตอบ**</u> 5

ข้อ 11 <u>**ตอบ**</u> 2

ก. $\log_2 a < \log_2 b \rightarrow \boxed{a < b}$

ข. $\dfrac{2^b}{2^d} > \dfrac{3^b}{3^d} \rightarrow 2^{b-d} > 3^{b-d} \rightarrow \dfrac{2^{b-d}}{3^{b-d}} > 1$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{b-d} > \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \rightarrow b-d<0 \rightarrow \boxed{b<d}$$

ค. $3^a2^a - 3^{2c} > 3^c2^a - 3^c3^a$

$$3^a2^a - 3^{2c} - 3^c2^a + 3^c3^a > 0$$

$$2^a(3^a-3^c)+3^c(3^a-3^c) > 0$$

$(3^a-3^c)(2^a+3^c) > 0$ และ $2^a+3^c>0$ แน่ๆ

$$3^a-3^c > 0$$

$$3^a > 3^c \rightarrow \boxed{a>c}$$

จาก ก, ข และ ค จะได้ $c<a<b<d$

$\therefore$ $b+d$ มีค่ามากที่สุด

ข้อ 12 <u>ตอบ</u> 3

จาก $\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \rightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y + \frac{1}{2}\log_2 z = 2$

$$2\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 4 \rightarrow \log_2(x^2yz) = 4 \rightarrow x^2yz = 2^4 \quad \text{———(1)}$$

จาก $\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \rightarrow \log_3 y + \frac{1}{2}\log_3 z + \frac{1}{2}\log_3 x = 2$

$$2\log_3 y + \log_3 z + \log_3 x = 4 \rightarrow \log_3(y^2zx) = 4 \rightarrow y^2zx = 3^4 \quad \text{———(2)}$$

จาก $\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \rightarrow \log_4 z + \frac{1}{2}\log_4 x + \frac{1}{2}\log_4 y = 2$

$$2\log_4 z + \log_4 x + \log_4 y = 4 \rightarrow \log_4(z^2xy) = 4 \rightarrow z^2xy = 4^4 \quad \text{———(3)}$$

$$(1)\times(2)\times(3), \quad x^4y^4z^4 = 2^4 3^4 4^4 \rightarrow xyz = 24 \quad \text{———(4)}$$

$$\frac{(1)}{(4)}, \quad x = \frac{16}{24} \rightarrow \frac{(2)}{(4)} \quad , \quad y = \frac{81}{24} \rightarrow \frac{(3)}{(4)} \quad , \quad z = \frac{256}{24}$$

$$\therefore \quad 15x + 8y + 3z = 15\left(\frac{16}{24}\right) + 8\left(\frac{81}{24}\right) + 3\left(\frac{256}{24}\right) = 69$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ข้อ 1 <u>ตอบ</u> 4

ข้อ 2 <u>ตอบ</u> 1

ข้อ 3 <u>ตอบ</u> 2

ข้อ 4 <u>ตอบ</u> 3

ข้อ 5 <u>ตอบ</u> 1

ข้อ 6 <u>ตอบ</u> 1

$$(1+\tan A)(1+\tan B) = 2 \rightarrow 1+\tan A+\tan B+\tan A\tan B = 2$$

$$\tan A+\tan B = 1-\tan A\tan B \rightarrow \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = 1$$

$\tan(A+B) = 1 \rightarrow A+B = 45^\circ$ เพราะว่า $0 < A+B < \pi$ หรือ $0^\circ < A+B < 180^\circ$

$$\therefore \tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan^2 22.5^\circ = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$$

***** หมายเหตุ $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$ ซึ่งควรจำได้นะครับจะประหยัดเวลามาก *****

แต่ถ้าอยากทำวิธีตรงก็ทำได้ดังนี้ครับ

$$\tan^2 22.5^\circ = \frac{\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ} = \frac{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)}\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$$

***** หมายเหตุ $\cos 2A = 1-2\sin^2 A \rightarrow \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A-1 \rightarrow \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

ข้อ 7 <u>**ตอบ**</u> 5

จากสมบัติของ arc เราทราบว่า $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $-1 \le x \le 1$

จากโจทย์ $\arcsin(6x-1) + \arccos(9x^2) = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $6x - 1 = 9x^2 \rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow (3x-1)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

นำ $x = \frac{1}{3}$ ไปตรวจคำตอบพบว่าสมการเป็นจริง $\therefore\ x = \frac{1}{3}$

ข้อ 8 <u>**ตอบ**</u> 3

ข้อ 9 <u>**ตอบ**</u> 4

ข้อ 10 <u>**ตอบ**</u> 20

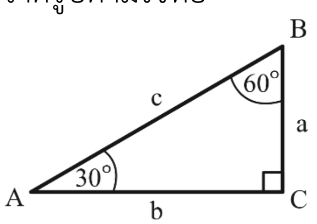
จากโจทย์ $2\cos 2A - 8\sin A + 3 = 0 \rightarrow 2(1 - 2\sin^2 A) - 8\sin A + 3 = 0$

$4\sin^2 A + 8\sin A - 5 = 0 \rightarrow (2\sin A - 1)(2\sin A + 5) = 0$

$\sin A = \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$ ใช้ไม่ได้ เพราะ $-1 \le \sin A \le 1$

$A = 30^\circ$ และโจทย์กำหนด $C = 90^\circ$ ดังนั้น $B = 60^\circ$

วาดรูปตามโจทย์



จากรูป $\frac{c}{a} = \csc 30^\circ = 2 \rightarrow c = 2a$

$\frac{b}{a} = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \rightarrow b = \sqrt{3}a$

โจทย์กำหนด $a + c = 30$ แต่ $c = 2a$ ดังนั้น $a + 2a = 30 \rightarrow a = 10$

$$\therefore\ a\sin A + b\sin B = a\sin 30^\circ + \sqrt{3}a\sin 60^\circ = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}a$$

$$= 2a = 2(10) = 20$$

ข้อ 11 __**ตอบ**__ 5

$$\frac{2\sin 130^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 290^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}$$

$$= \frac{\cos 40^\circ + (\cos 40^\circ - \cos 20^\circ)}{\cos 70^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ \sin 10^\circ}{\cos 70^\circ}$$

$$= \frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2\cos 30^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$$

จะได้ $\quad A = \arctan\left(\frac{2\sin 130^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 290^\circ}\right) = \arctan\sqrt{3} = 60^\circ$

$$\therefore \sin(\frac{\pi}{6} + A)\cos(\frac{\pi}{6} - A) = \sin(30^\circ + 60^\circ)\cos(30^\circ - 60^\circ)$$

$$= \sin 90^\circ \cos(-30^\circ) = (1)\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

***** หมายเหตุ พี่ขอแถมให้อีกวิธีหนึ่งนะครับ เผื่อบางคนจะชอบวิธีนี้

$$\frac{2\sin 130^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 290^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2\sin(30^\circ + 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}$$

$$= \frac{2(\sin 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ \sin 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}$$

$$= \frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3}\sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}$$

ข้อ 12 **<u>ตอบ</u>** 1

จากโจทย์ $A+B+C = 180^\circ \rightarrow \dfrac{A+B+C}{2} = 90^\circ$

$\dfrac{A+C}{2} = 90^\circ - \dfrac{B}{2}$, $\dfrac{B+C}{2} = 90^\circ - \dfrac{A}{2}$

$$\therefore \quad a\sin^2\left(\frac{A+C}{2}\right)+b\sin^2\left(\frac{B+C}{2}\right) = a\sin^2\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)+b\sin^2\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)$$

$$= a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2} = a\left(\frac{1+\cos B}{2}\right)+b\left(\frac{1+\cos A}{2}\right)$$

***** หมายเหตุ $\cos 2A = 2\cos^2 A-1 \rightarrow \cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$

ดังนั้น $\cos^2\dfrac{B}{2} = \dfrac{1+\cos B}{2}$, $\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1+\cos A}{2}$

$$= \frac{a+b+a\cos B+b\cos A}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\text{ความยาวของเส้นรอบรูป}}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

***** หมายเหตุ จากกฎของโปรเจคชัน $a\cos B+b\cos A = c$

$b\cos C+c\cos B = a$

$a\cos C+c\cos A = b$

MATRIX

ข้อ 1 <u>**ตอบ**</u> 2

ข้อ 2 <u>**ตอบ**</u> 4

ข้อ 3 <u>**ตอบ**</u> 5

จาก $B = A^{-1}BA$ นำ A คูณข้างหน้าทั้ง 2 ข้างจะได้

$$AB = AA^{-1}BA$$

$$\boxed{AB = BA}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & b \\ 2c-d & d \end{bmatrix}$$

พิจารณาแถว 1, หลัก 2 : $2b = b \longrightarrow \boxed{b = 0}$ ——(1)

แถว 2, หลัก 1 : $-a+c = 2c-d$

$\boxed{a+c-d = 0}$ ——(2)

(1) + (2) , $a+b+c-d = 0$

ข้อ 4 <u>**ตอบ**</u> 3

ข้อ 5 **<u>ตอบ</u>** 3

จาก $(A-B)B = B(A-B)$

$$AB - B^2 = BA - B^2 \rightarrow \boxed{AB = BA}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

พิจารณา แถว 1 , หลัก 1 : $(1)(-3)+(2)(a) = (-3)(1)+(1)(-1)$

$$-3+2a = -3-1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

แถว 2 , หลัก 1 : $(-1)(-3)+(3)(a) = a(1)+b(-1)$

$$3+3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}-b \rightarrow b = -2$$

จะได้ $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\det(A+B) = -2+\frac{9}{2} = \frac{5}{2}$

ข้อ 6 **<u>ตอบ</u>** 23

ข้อ 7 **<u>ตอบ</u>** 5

จาก $AB^t = I \rightarrow \boxed{B^t = A^{-1}}$ และ $\boxed{A = (B^t)^{-1}}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{B = (A^{-1})^t} \rightarrow \boxed{B^{-1} = A^t}$$

ก. จริง เพราะ $AB^t = B^tA = I$

ข. จริง

ค. จริง

ง. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = A^tB^t = (BA)^t$ $\therefore$ ง. จริง

ข้อ 8 **<u>ตอบ</u>** 5

ข้อ 9 **<u>ตอบ</u>** 9

$$\det A = 15 \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 6a & 0 & -2b \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ b & -a & 0 & b & -a \\ 3 & -1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccc} a & 0 & -2b \end{array} \end{array} = 7a-4b \rightarrow 7a-4b = 15 \quad \text{——} \quad (1)$$

จากสมการ $AX = B$ และกฎของคราเมอร์

จะได้ $y = \dfrac{\det Ay}{\det A} \rightarrow 1 = \dfrac{\det Ay}{15} \rightarrow \det Ay = 15$

$$\det Ay = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -6a & 0 & 9b \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 9 & 2 & 1 & 9 \\ b & a & 0 & b & a \\ 3 & -10 & -1 & 3 & -10 \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccc} -a & 0 & -20b \end{array} \end{array} = -7a-11b \rightarrow -7a-11b = 15 \quad \text{——} \quad (2)$$

(1) + (2), $-15b = 30 \rightarrow b = -2 \rightarrow$ แทน b ใน (1) จะได้ $7a - 4(-2) = 15 \rightarrow a = 1$

$\therefore \ (a-b)^2 = (1-(-2))^2 = 3^2 = 9$

ข้อ 10 **<u>ตอบ</u>** 3

ระบบสมการมี 1 คำตอบ แสดงว่า $\det A \neq 0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & a & -4 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a & 2 & -2 & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccc} 2a & -4 & -2 \end{array} \end{array} \neq 0$$

จะได้ $3a - 6 \neq 0 \qquad \therefore \ a \neq 2$

ข้อ 11 <u>ตอบ</u> 4

สมมติเมทริกซ์ที่สร้างคือ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะสร้างได้ทั้งหมด $\binom{5}{4} \times 4! = 120$ วิธี

Event คือ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แสดงว่า $\det A \neq 0$

หา E' : $\det A = 0 \rightarrow ad - bc = 0 \rightarrow \boxed{ad = bc}$

กรณีที่ 1 $ad = bc = 2$

$(1)(2) = (-1)(-2)$

$(1)(2) = (-2)(-1)$

$(2)(1) = (-1)(-2)$

$(2)(1) = (-2)(-1)$

$(-1)(-2) = (1)(2)$

$(-1)(-2) = (2)(1)$

$(-2)(-1) = (1)(2)$

$(-2)(-1) = (2)(1)$

$\therefore$ กรณีที่ 1 มี 8 วิธี

กรณีที่ 2 $ad = bc = -2$

$(1)(-2) = (-1)(2)$

$(1)(-2) = (2)(-1)$

$(-2)(1) = (-1)(2)$

$(-2)(1) = (2)(-1)$

$(-1)(2) = (1)(-2)$

$(-1)(2) = (-2)(1)$

$(2)(-1) = (1)(-2)$

$(2)(-1) = (-2)(1)$

$\therefore$ กรณีที่ 2 มี 8 วิธี

รวม 2 กรณีจะได้ $n(E') = 16$ วิธี

ดังนั้น $n(E) = 120 - 16 = 104$ วิธี

$\therefore \quad P(E) = \frac{104}{120} = \frac{13}{15}$

****