เฉลย PAT 1 และคณิตศาสตร์ 1 วิชาสามัญ
สำหรับน้องๆ โรงเรียนพิบูลวิทยาลัย

ข้อ 9 <u>ตอบ</u> 5

เราทราบว่า $A + B = 45^\circ$ แล้ว $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$

$$\begin{aligned} abc &= (1+\tan 245^\circ)(1-\tan 200^\circ)(1+\tan 250^\circ)(1-\tan 205^\circ)(1+\tan 260^\circ)(1-\tan 215^\circ) \\ &= (1+\tan 245^\circ)[1+\tan(-200^\circ)](1+\tan 250^\circ)[1+\tan(-205^\circ)](1+\tan 260^\circ)[1+\tan(-215^\circ)] \\ &= (2)(2)(2) = 8 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \log_3(\tan 60^\circ)^{abc} = \log_3(\sqrt{3})^8 = \log_3 3^4 = 4$$

ข้อ 14 <u>ตอบ</u> 50

$$(\sin x - \cos x)^2 = \frac{\pi^2}{16} \rightarrow 1-\sin 2x = \frac{\pi^2}{16} \rightarrow \sin 2x = 1-\frac{\pi^2}{16} = \frac{16-\pi^2}{16}$$

$$\frac{a}{b-\pi^c} = \tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{\frac{16-\pi^2}{16}} = \frac{32}{16-\pi^2}$$

$$\therefore \quad a+b+c = 32+16+2 = 50$$

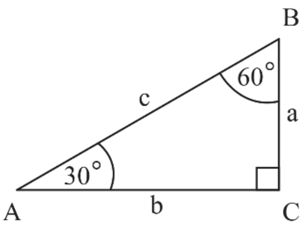
ข้อ 15 <u>ตอบ</u> 20

$$2\cos 2A - 8\sin A + 3 = 0 \rightarrow 2(1-2\sin^2 A) - 8\sin A + 3 = 0$$

$$4\sin^2 A + 8\sin A - 5 = 0 \rightarrow (2\sin A - 1)(2\sin A + 5) = 0$$

$\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow A = 30^\circ$ โจทย์กำหนด $C = 90^\circ$ ดังนั้น $B = 60^\circ$

วาดรูปตามข้อมูลที่ได้



จากรูป $\frac{c}{a} = \csc 30^\circ \rightarrow c = 2a$

$$\frac{b}{c} = \cos 30^\circ \rightarrow b = 2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}a$$

จากโจทย์ $a + c = 30 \rightarrow a + 2a = 30 \rightarrow a = 10$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a\sin A + b\sin B &= (10)\sin 30^\circ + \sqrt{3}(10)\sin 60^\circ \\ &= (10)\left(\frac{1}{2}\right) + 10\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 20 \end{aligned}$$

ข้อ 16 <u>ตอบ</u> 5

$$a_4 = \sin^4 15^\circ + \cos^4 15^\circ = (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)^2 - 2\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ$$

$$a_6 = \sin^6 15^\circ + \cos^6 15^\circ = (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)(\sin^4 15^\circ - \sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ + \cos^4 15^\circ)$$

$$= (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ)^2 - 3\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ = 1 - 3\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ$$

$$\therefore\ 3a_4 - 2a_6 + 1 = 3(1 - 2\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ) - 2(1 - 3\sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ) + 1$$

$$= 3 - 2 + 1 = 2$$

ข้อ 17 <u>ตอบ</u> 1024

$$\frac{1}{b}\left(\frac{a}{cd}\right) = \frac{1}{b}\left[\frac{2(2\tan 1^\circ)}{1-\tan^2 1^\circ}\right]\left[\frac{2(2\tan 2^\circ)}{1-\tan^2 10^\circ}\right] \cdots\cdots \left[\frac{2(2\tan 10^\circ)}{1-\tan^2 10^\circ}\right]$$

$$= \frac{1}{b}(2^{10})\tan 2^\circ \tan 4^\circ \cdots\cdots \tan 20^\circ$$

$$= \frac{1}{b}(1024)b = 1024$$

ข้อ 22 <u>ตอบ</u> 3

$$a = 2\cos 35^\circ \cos 15^\circ \quad , \quad b = 2\cos 35^\circ \sin 15^\circ$$

$$ab = (2\cos^2 35^\circ)(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ) = (2\cos^2 35^\circ)\sin 30^\circ = \cos^2 35^\circ$$

ข้อ 24 <u>ตอบ</u> 1

$$a = \cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2\cos 36^\circ \sin 18^\circ = \frac{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{2\sin 72^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$b = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\therefore\ \log_b a = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\sqrt{2}} 2^{-1} = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{-2} = -2$$

ข้อ 25 <u>ตอบ</u> 4

$$\arctan\left[\frac{2\cos(60^\circ - 50^\circ) - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}\right] = \arctan\left[\frac{2(\cos 60^\circ \cos 50^\circ + \sin 60^\circ \sin 50^\circ) - \cos 50^\circ}{2\cos 40^\circ \sin 30^\circ}\right]$$

$$= \arctan\left[\frac{\sqrt{3}\sin 50^\circ}{\sin 50^\circ}\right] = \arctan\sqrt{3}$$

$$= 60^\circ$$

ข้อ 26 **<u>ตอบ</u>** 5

$$A = \arctan\left[\frac{2\sin 50^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}\right] = \arctan\left[\frac{2\sin(30^\circ + 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}\right]$$

$$= \arctan\left[\frac{2(\sin 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ \sin 20^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}\right] = \arctan\left[\frac{\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}\right]$$

$$A = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6} + A\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - A\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = (1)\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ข้อ 34 **<u>ตอบ</u>** 4

$$\sin\frac{17\pi}{7} = \sin(2\pi + \frac{3\pi}{7}) = \sin\frac{3\pi}{7}$$

$$\sin\frac{10\pi}{7} = \sin(\pi + \frac{3\pi}{7}) = -\sin\frac{3\pi}{7}$$

$$\therefore \arccos(\sin\frac{17\pi}{7}) - \arcsin(\sin\frac{10\pi}{7}) = \arccos(\sin\frac{3\pi}{7}) - \arcsin(-\sin\frac{3\pi}{7})$$

$$= \arccos(\sin\frac{3\pi}{7}) - [-\arcsin(\sin\frac{3\pi}{7})]$$

$$= \arcsin(\sin\frac{3\pi}{7}) + \arccos(\sin\frac{3\pi}{7}) = \frac{\pi}{2}$$

ข้อ 37 **<u>ตอบ</u>** 205

จากความรู้เรื่องลำดับเลขคณิต $a_m - a_n = (m-n)d$

$$\frac{x}{y} = \frac{(b_6 - b_4) + (b_6 - b_1)}{a_4 - a_2} = \frac{2d_b + 5d_b}{2d_a} = \frac{7}{2}\left(\frac{d_b}{d_a}\right)$$

หา $\frac{d_b}{d_a}$ จาก $a_5 - a_1 = b_5 - b_2 \rightarrow 4d_a = 3d_b \rightarrow \frac{d_b}{d_a} = \frac{4}{3}$

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{2}\left(\frac{d_b}{d_a}\right) = \frac{7}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{14}{3}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 14^2 + 3^2 = 205$$

ข้อ 38 <u>ตอบ</u> 52

$$a_8 - a_1 = 36 - 1 \rightarrow 7d = 35 \rightarrow d = 5$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_4}+\sqrt{a_3}} + \ldots.. + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}} = 3$$

$$\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \frac{\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3}}{a_4 - a_3} + \ldots.. + \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = 3$$

เราทราบว่า $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots.. = a_n - a_{n-1} = d$

$$\frac{1}{d}\left[\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_4} - \sqrt{a_3} + \ldots.. + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}\right] = 3$$

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1} = 3d \rightarrow \sqrt{a_n} = 3(5) + \sqrt{1} \rightarrow a_n = 16^2$$

$$a_1 + (n-1)d = 256 \rightarrow 1 + (n-1)(5) = 256 \quad \therefore\ n = 52$$

ข้อ 39 <u>ตอบ</u> 3

$$a_{20} - a_{10} = 30 \rightarrow 10d_a = 30 \rightarrow d_a = 3$$

$$b_{n+1} - b_n = 1 \rightarrow d_b = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + (n-1)d_a}{b_1 + (n-1)d_b} = \frac{d_a}{d_b} = \frac{3}{1} = 3$$

ข้อ 40 <u>ตอบ</u> 1

จากโจทย์ $a_1 = x(y-z) = xy - xz$

$a_2 = y(z-x) = yz - xy$

$a_3 = z(x-y) = xz - yz$

$$a_1 + a_2 + a_3 = xy - xz + yz - xy + xz - yz$$

$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 0$ แต่ $a_1 \neq 0$

$$1 + r + r^2 = 0$$

ข้อ 41 **ตอบ** 4

$$a_n = a_1 r^{n-1} \rightarrow a_n = (1)\left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1}$$

$$a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1}$$

จะเป็นลบเมื่อ n เป็นจำนวนคู่

จะเป็นบวกเมื่อ n เป็นจำนวนคี่

พจน์ที่เป็นลบคือ $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{50}$ ทั้งหมด 25 พจน์

พจน์ที่เป็นบวกคือ $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{51}$ ทั้งหมด 26 พจน์

เรียงข้อมูลจากน้อยไปมากจะได้

$$\underbrace{a_{50}, a_{48}, \ldots, a_2}_{25\text{ พจน์}}, a_1, \underbrace{a_3, a_5, \ldots, a_{51}}_{25\text{ พจน์}} \quad \therefore \ \text{Med} = a_1 = 1$$

ข้อ 42 **ตอบ** 1

$$a_1 = 5, a_{50} = 103 \rightarrow a_{50} - a_1 = 98 \rightarrow 49d = 98 \rightarrow d = 2$$

$$\begin{aligned}
a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots + a_{49}^2 - a_{50}^2 &= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2)(a_3 - a_4)(a_3 + a_4)\ldots(a_{49} - a_{50})(a_{49} + a_{50}) \\
&= (-d)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{49} + a_{50}) \\
&= (-2)\frac{50}{2}(a_1 + a_{50}) = -50(5 + 103) \\
&= -5,400
\end{aligned}$$

ข้อ 43 **ตอบ** 1

ให้จำนวนเต็มบวก 100 จำนวน เรียงกันเป็น $n+1, n+2, n+3, \ldots, n+100$

ผลบวกทั้งหมดของ 100 จำนวน $= (n+1) + (n+2) + (n+3) + \ldots + (n+100)$

$$\begin{aligned}
&= 100n + (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) \\
&= 100n + 5050
\end{aligned}$$

พิจารณา $100n + 50$ พบว่าจะมี 2 หลักสุดท้ายเป็น 50

ดังนั้น จำนวนใดที่เกิดจากผลบวกของจำนวนเต็มบวก 100 จำนวนเรียงกัน

จำนวนนั้นจะต้องมี 2 หลักสุดท้ายเป็น 50 $\therefore$ **ตอบ** 1

ข้อ 44 <u>**ตอบ**</u> 59

$$S_n = 3n^2 + 2n \rightarrow a_n = 6n-1 \rightarrow a_{2^n} = 6(2^n)-1$$

$$m = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \ldots.. + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}}$$

$$= \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2^n}a_{2^n} = \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2^n}\left[6(2^n)-1\right] = \sum_{n=1}^{10}\left(6-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{10}6 - \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2^n} = 60-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots..+\frac{1}{2^{10}}\right]$$

$$m = 60 - \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}} = 60-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 59+\frac{1}{2^{10}} = 59+\frac{1}{1024}$$

$\therefore$ จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่า $m = 59$

ข้อ 45 <u>**ตอบ**</u> 3

$i^{101} = i$ เพราะ $\frac{101}{4}$ เหลือเศษ 1

$i^{101!} = 1$ เพราะ $\frac{101!}{4}$ ลงตัว

$\therefore$ $i^{101} + i^{101!} = i+1 = 1+i$

ข้อ 46 <u>**ตอบ**</u> 1

$$\left(\frac{1+i}{2}-\frac{1}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{1+i}{2}-\frac{1}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)}\right)^3 = \left(\frac{1+i}{2}-\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)^3 = (i)^3 = -i$$

ข้อ 47 <u>**ตอบ**</u> 5

(a, b, c) ที่ทำให้ $i^a + i^b + i^c = 1$ แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 (a, b, c) มีค่า a, b, c แตกต่างกัน เช่น $i^1 + i^3 + i^4 = 1$

ซึ่งมีทั้งสิ้น $3! = 6$ แบบ

กรณีที่ 2 (a, b, c) มีค่า a, b, c ซ้ำกัน เช่น $i^2 + i^4 + i^4 = 1$

ซึ่งมีทั้งสิ้น $\frac{3!}{2!} = 3$ แบบ

$\therefore$ $n(s) = 6+3 = 9$

ข้อ 48 **ตอบ** 3

$$\frac{1+9i}{5+4i} = \frac{(1+9i)}{(5+4i)}\frac{(5-4i)}{(5-4i)} = \frac{41+41i}{41} = 1+i$$

$$\frac{5-i}{3+2i} = \frac{(5-i)}{(3+2i)}\frac{(3-2i)}{(3-2i)} = \frac{13-13i}{13} = 1-i$$

ให้ $w = \left(\frac{1+9i}{5+4i}\right)^{2019} + \left(\frac{5-i}{3+2i}\right)^{2019} = (1+i)^{2019} + (1-i)^{2019}$

ให้ $z = 1+i$ จะได้ $\bar{z} = 1-i$

จะได้ $w = z^{2019} + (\bar{z})^{2019} = z^{2019} + (\overline{z^{2019}})$

$w = 2\,\mathrm{Re}(z^{2019})$

จะพบว่า w เป็นจำนวนจริง $\therefore$ ส่วนจินตภาพของ $w = 0$

ข้อ 49 **ตอบ** 120

$|z_1| = 2 \rightarrow |z_1|^2 = 4 \rightarrow z_1\bar{z}_1 = 4$

$|z_2| = 3 \rightarrow |z_2|^2 = 9 \rightarrow z_2\bar{z}_2 = 9$

$|z_3| = 4 \rightarrow |z_3|^2 = 16 \rightarrow z_3\bar{z}_3 = 16$

$$\begin{aligned}
|4z_2z_3 + 9z_3z_1 + 16z_1z_2| &= |z_1\bar{z}_1z_2z_3 + z_2\bar{z}_2z_3z_1 + z_3\bar{z}_3z_1z_2| \\
&= |z_1z_2z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)| \\
&= |z_1||z_2||z_3||\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| \\
&= (2)(3)(4)|\overline{z_1 + z_2 + z_3}| \\
&= 24|z_1 + z_2 + z_3| = 24(5) \\
&= 120
\end{aligned}$$

ข้อ 50 <u>ตอบ</u> 0

$$|z_1| = 1 \rightarrow |z_1|^2 = 1 \rightarrow z_1\overline{z}_1 = 1$$

$$|z_2| = 1 \rightarrow |z_2|^2 = 1 \rightarrow z_2\overline{z}_2 = 1$$

$$|z_3| = 1 \rightarrow |z_3|^2 = 1 \rightarrow z_3\overline{z}_3 = 1$$

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0 \rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 2z_3z_1 = 0$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2z_3\overline{z}_3 + z_1\overline{z}_1z_2z_3 + z_1z_2\overline{z}_2z_3) = 0$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2z_3(\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3) = 0$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2z_3(\overline{z_1 + z_2 + z_3}) = 0$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2z_3(\overline{0}) = 0$$

$$\therefore\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

ขอให้น้องทุกคนโชคดีในการสอบ สอบติดในคณะที่ต้องการ
เป็นเด็กดีของคุณพ่อคุณแม่นะครับ
รักและห่วงใยจากใจจริง

พี่ช้าง