

พิชิต คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 & TGAT2-3

เฉลยโจทย์ข้อที่ฝากให้น้องๆ ไปฝึกฝนด้วยตนเอง

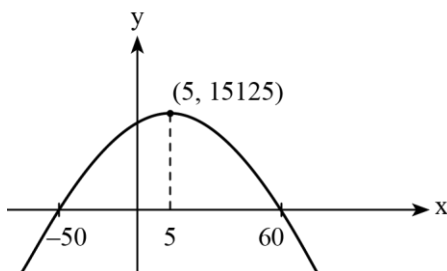
ฟังก์ชันกำลังสอง

ข้อ 8 หน้า 12 ตอบ 2

ให้ y เป็นกำไรต่อเดือน

$$y = (500 + 10x) \left(50 - \frac{x}{100} \cdot 50 - 20 \right)$$

$$y = (500 + 10x) \left(30 - \frac{x}{20} \right)$$



(ก) ถูก เมื่อ $x = 10$ (ลด 10% ราคา = 45 บาท)

จะได้ $y = 15,000$ เท่ากับเมื่อ $x = 0$

(ข) ผิด เพราะกำไรสูงสุดเมื่อ $x = 5$ (ลด 5%)

ราคา = $50 - 2.5 = 47.5$ บาท

(ค) ถูก เมื่อ $x = 5 \rightarrow y_{\max} = 15,125$

ลำดับและอนุกรมอนันต์

ข้อ 11 หน้า 15 ตอบ 1

พิจารณา ก)
$$a_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

ดังนั้น เป็นลำดับลู่เข้า (ลู่เข้าหา 1)

∴ ก. ถูก

พิจารณา ข) $\sin \pi = \sin 2\pi = \sin 3\pi = \dots = \sin n\pi = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ดังนั้น เป็นลำดับลู่เข้า (ลู่เข้าหา 0)

∴ ข. ผิด

พิจารณา ค) ผิด

เช่น $5, 5, 5, \dots$ จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$

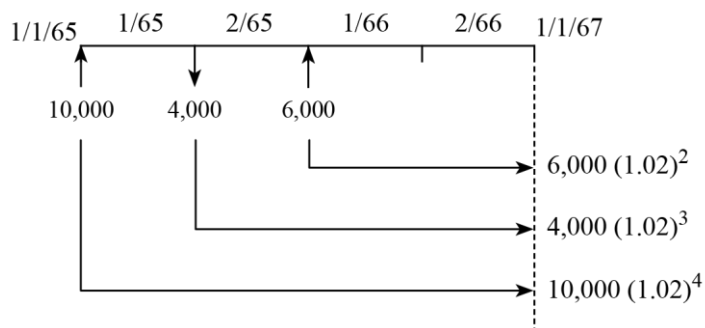
เป็นลำดับลู่เข้า แต่

$$5 + 5 + 5 + \dots = \text{หาค่าไม่ได้}$$

∴ เป็นอนุกรมลู่ออก

ดอกเบี้ย, มูลค่าเงินตามเวลา และค่างวด

ข้อ 12 หน้า 16 ตอบ 4



$$\text{ดอกเบี้ยต่อ 6 เดือน} = \frac{4\%}{2} = 2\%$$

$$\text{เงินรวม (1/1/67)} = 10,000(1.02)^4 - 4,000(1.02)^3 + 6,000(1.02)^2$$

ความสามารถทางเหตุผล

ข้อ 10 หน้า 31 ตอบ 2

อำนาจ 9 วินาที → ประยุทธ์ 11 วินาที
 ↓
 ประเสริฐ 11 วินาที
 ↓
 เจริญ 10 วินาที
 ↓
 ประสิทธิ์ 8 วินาที

ข้อ 12 หน้า 32 ตอบ 4

จาก E เป็นแฟนกับ D

และ B เป็นแฟนกับ G

แสดงว่า A ไม่เป็นแฟนกับ F ก็เป็นแฟนกับ H

แต่ A ไปเดทวันสุดท้าย และ F ไปเดทก่อน G

แสดงว่า F ไปเดทวันสุดท้ายกับ A ไม่ได้

ดังนั้น A เป็นแฟนกับ H

ADDITIONAL PROBLEMS เรื่อง จำนวนจริง

1. ตอบ 3

จากโจทย์จะพบว่าตัวประกอบที่เหลือคือ $x+6$

$$\text{ดังนั้น } x^3 + ax^2 + bx + 30 = (x^2 - 4x + 5)(x + 6)$$

$$\text{แทนค่า } x = 1 \text{ ลงในสมการจะได้ } 1 + a + b + 30 = (2)(7)$$

$$\therefore a + b = -17$$

2. ตอบ $\frac{3}{2}$

$$\text{จากโจทย์ } P(x) = (x-1)(x+1)Q(x) + (ax+b) \text{ โดย } R(x) = ax+b$$

$$x = 1 \rightarrow P(1) = 0 + a(1) + b$$

$$1 = a + b \quad \text{—————(1)}$$

$$x = -1 \rightarrow P(-1) = 0 + a(-1) + b$$

$$2 = -a + b \quad \text{—————(2)}$$

$$(1) + (2), \quad 3 = 2b \rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\text{แทน } b = \frac{3}{2} \text{ ใน (1) ได้ } a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore R(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\text{และได้ว่า } R(0) = \frac{3}{2}$$

3. ตอบ 1

จากโจทย์ ถ้า $x-1$, $x-2$ และ $x-3$ ทหาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 1

แสดงว่า $x-1$, $x-2$ และ $x-3$ ทหาร $P(x)-1$ ลงตัว

หรือก็คือ $x-1$, $x-2$ และ $x-3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)-1$

และเมื่อ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 จะได้ว่า

$$P(x)-1 = k(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$P(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) + 1 \quad \text{---(1)}$$

จาก $x-4$ ทหาร $P(x)$ ลงตัว

แสดงว่า $x-4$ ทหาร $P(x)$ เหลือเศษ 0

นั่นก็คือ $P(4) = 0$

แทน $x = 4$ ใน (1) จะได้ $P(4) = k(4-1)(4-2)(4-3) + 1$

$$0 = k(3)(2)(1) + 1$$

$$k = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + 1$$

$$P(5) = -\frac{1}{6}(5-1)(5-2)(5-3) + 1$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1$$

$$= -3$$

4. ตอบ 8 คน

ให้เดิมมีครู x คน

บริจาคคนละ $\frac{5160}{x}$ บาท

ต่อมามีครู $x+2$ คน

บริจาคคนละ $\frac{5160}{x+2}$ บาท

จากโจทย์ได้ว่า

$$\frac{5160}{x} - \frac{5160}{x+2} = 215$$

$$\div 215, \frac{24}{x} - \frac{24}{x+2} = 1$$

$$\frac{24(x+2) - 24x}{(x)(x+2)} = 1$$

$$\frac{24x + 48 - 24x}{x^2 + 2x} = 1$$

$$48 = x^2 + 2x$$

$$0 = x^2 + 2x - 48$$

$$0 = (x-6)(x+8)$$

$$\therefore x = 6, \cancel{8}$$

ปัจจุบันมีครู $6+2 = 8$ คน

5. ตอบ 1

ให้แผนกขายมี x คน

และแผนกบัญชีมี $12 - x$ คน

ทั้ง 2 แผนก โบนัสที่ได้รวมเท่ากันคือ 35,000 บาท

แสดงว่า แผนกขายได้คนละ $\frac{35,000}{x}$ บาท

แผนกบัญชีได้คนละ $\frac{35,000}{12 - x}$ บาท

$$\text{จากโจทย์ } \frac{35,000}{x} - \frac{35,000}{12 - x} = 2,000$$

$$\div 1000, \quad \frac{35}{x} - \frac{35}{12 - x} = 2$$

$$\frac{35(12 - x) - 35x}{(x)(12 - x)} = 2$$

$$420 - 70x = 2(12x - x^2)$$

$$\div 2, \quad 210 - 35x = 12x - x^2$$

$$x^2 - 47x + 210 = 0$$

$$(x - 42)(x - 5) = 0 \quad \therefore x = \cancel{42}, 5 \quad (x = 42 \text{ ไม่ได้ เพราะรวม 2 แผนก ต้องได้ 12 คน})$$

แผนกขายมีจำนวนคนน้อยกว่าแผนกบัญชี $= 12 - 5 = 7$ คน

7. ตอบ 2.5

แยก 2 กรณี โดย

กรณีที่ 1 $x \geq 0$ ซึ่งจะได้ $|x| = x$

$$|x^2 - 2x| = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 2x = x^2 - 3x + 2 \quad \text{หรือ} \quad x^2 - 2x = -(x^2 - 3x + 2)$$

$$x = 2 \quad \quad \quad x^2 - 2x = -x^2 + 3x - 2$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, 2$$

$\therefore x = 2, \frac{1}{2}$ ตรวจสอบคำตอบแล้วพบว่าใช้ได้ทั้งคู่

และทั้ง 2 คำตอบสอดคล้องกับเงื่อนไข $x \geq 0$

ดังนั้น กรณีนี้ $x = 2, \frac{1}{2}$

กรณีที่ 2 $x < 0$ ซึ่งจะได้ $|x| = -x$

$$|x^2 - 2(-x)| = x^2 - 3x + 2$$

$$|x^2 + 2x| = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 + 2x = x^2 - 3x + 2 \quad \text{หรือ} \quad x^2 + 2x = -(x^2 - 3x + 2)$$

$$5x = 2 \quad x^2 + 2x = -x^2 + 3x - 2$$

$$x = \frac{2}{5} \quad 2x^2 - x + 2 = 0$$

ไม่มีคำตอบ **

$$\therefore x = \frac{2}{5}$$

แต่เราพบว่า $x = \frac{2}{5}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $x < 0$

ดังนั้น กรณีนี้ ไม่มีคำตอบ

เมื่อรวม 2 กรณี จะได้ เซตคำตอบ (A) = $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$

และ ผลบวกของสมาชิกในเซต $A = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$

** รูปแบบ $ax^2 + bx + c = 0$ จะไม่มีคำตอบเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$

$$\begin{aligned} \text{สำหรับสมการนี้ } b^2 - 4ac &= (-1)^2 - 4(2)(2) \\ &= -15 \end{aligned}$$

ซึ่ง $b^2 - 4ac < 0$ สมการ $2x^2 - x + 2 = 0$ จึงไม่มีคำตอบ

8. ตอบ 5

จากโจทย์ $|x^2 - 2x| - x \leq 4$

$$|x^2 - 2x| \leq x + 4$$

$$-(x + 4) \leq x^2 - 2x \leq x + 4$$

$$-x - 4 \leq x^2 - 2x \quad \text{และ} \quad x^2 - 2x \leq x + 4$$

$$0 \leq x^2 - x + 4 \quad \cap \quad x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

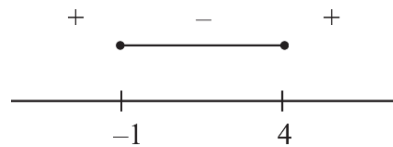
$$x^2 - x + 4 \geq 0$$

$$(x - 4)(x + 1) \leq 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$



ดังนั้นเซตคำตอบของสมการนี้คือ $[-1, 4]$

และ $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$n(A) = 6$ จึงได้ว่า จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซต $A = 2^{n(A)} = 2^6 = 64$

9. ตอบ 4

$$A : x^2 + 2|x - 3| - 9 > 0$$

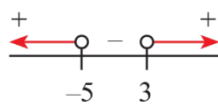
$$2|x - 3| > 9 - x^2$$

$$|2x - 6| > 9 - x^2$$

$$2x - 6 > 9 - x^2 \quad \text{หรือ} \quad 2x - 6 < -(9 - x^2)$$

$$x^2 + 2x - 15 > 0 \quad \cup \quad 2x - 6 < -9 + x^2$$

$$(x + 5)(x - 3) > 0$$

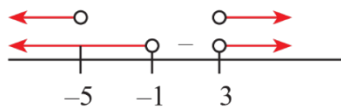
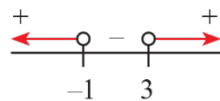


$$-x^2 + 2x + 3 < 0$$

นำ -1 คูณ 2 ข้าง

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$(x - 3)(x + 1) > 0$$



$$\therefore A = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

$$B : |x - 3| < 2$$

$$-2 < x - 3 < 2$$

บวก 3

$$1 < x < 5$$

$$B = (1, 5)$$

ดังนั้น $A \cap B = (3, 5)$ ซึ่ง $(3, 5) \subset (3, 6)$

10. **ตอบ 5**

$$x|x| < -|5x-14|$$

จากการพิจารณาสมการ

$$x|x| < \underbrace{-|5x-14|}_{- \text{ หรือ } 0}$$

ขวามือ $- , 0$ แสดงว่า สมการจะเป็นจริง

ซ้ายมือต้อง $-$ นั้นหมายถึง $x|x| < 0$

$$\therefore x < 0$$

แสดงว่า สมการข้อนี้จะจริง เมื่อ $x < 0$ เท่านั้น

ดังนั้น $|\overline{x}| = -x$ และ $|\overline{5x-14}| = -(5x-14)$

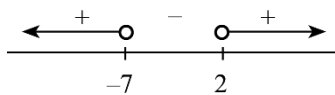
เมื่อ $x < 0$, $x(-x) < -(-(5x-14))$

$$-x^2 < 5x-14$$

$$0 < x^2 + 5x - 14$$

$$x^2 + 5x - 14 > 0$$

$$(x+7)(x-2) > 0$$



ด้วยเงื่อนไข $x < 0 \therefore$ เซตคำตอบ $= (-\infty, -7)$

11. ตอบ $(-\infty, 2]$
12. ตอบ $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$
13. ตอบ $[2, 4]$
14. ตอบ $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$
15. ตอบ $\left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$
16. ตอบ $(-\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup \left[-\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 3]$
17. ตอบ $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$
18. ตอบ $[-2, 6]$
19. ตอบ $[-2, 1) \cup (1, 4]$
20. ตอบ $(-4, 4)$
21. ตอบ $(-1, 1) \cup (1, 3)$
22. ตอบ $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
23. ตอบ $[-8, -2] \cup [4, \infty)$
24. ตอบ $\left[-\frac{2}{3}, 4\right]$
25. ตอบ $(-5, -2)$
26. ตอบ $(25, 53)$
27. ตอบ $\mathbb{R} - \{-3, -5\}$

ADDITIONAL PROBLEMS เรื่อง ฟังก์ชัน

1. ตอบ 2

จากโจทย์ r แจกแจงออกมาได้

โดย $r = \{(-3, 1), (-2, 0), (-1, -1), (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1)\}$

r เป็นฟังก์ชัน แต่ไม่ใช่ $1-1$

$\therefore r^{-1}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน (ก) ผิด

$$r^{-1} = \{(1, -3), (0, -2), (-1, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3)\}$$

$$\therefore r \cap r^{-1} = \{(0, -2), (-1, -1), (-2, 0)\}$$

$$\text{จะได้ } n(r \cap r^{-1}) = 3 \quad (\text{ข}) \text{ ถูก}$$

เมื่อ (ก) ผิด และ (ข) ถูก พบว่า คำตอบที่ไม่ใช่แน่ๆ คือ คำตอบ 1, คำตอบ 3, คำตอบ 4 และคำตอบ 5 ดังนั้นเหลือเพียงคำตอบ 2 จึงตอบคำตอบ 2 แน่แน่นอน

เมื่อพิจารณา D_r, R_r

$$D_r = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = A$$

$$R_r = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$\therefore D_r \cap R_r = R_r \neq D_r \quad (\text{ค}) \text{ ผิด}$$

2. ตอบ 5

จากโจทย์

$[x]$ = จำนวนเต็มที่มากที่สุด ซึ่งมีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ x

$$\text{เช่น } [2.3] = 2$$

$$[4.7] = 4$$

$$[-5.2] = -6$$

$$[-7] = -7$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2.4) &= 10 \left[\frac{2.4 + 5}{10} \right] + \left[2.4 + \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{10} [5 - 6(2.4)] \\ &= 10[0.74] + [2.9] + \frac{1}{10} [-9.4] \\ &= 10(0) + 2 + \frac{1}{10} \cdot (-10) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. ตอบ 6

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{(1+x)-1}{1+x}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{x}{1+x}}} \\
 &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{(1+x)}{x}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x} - 1} = 1 - \frac{1}{-\frac{1}{x}} \\
 &= 1 - \frac{x}{-1} = 1+x
 \end{aligned}$$

$$f(1+a) = 1 + (1+a) = 2+a$$

$$f(2+a) = 1 + (2+a) = 3+a$$

$$f(3+a) = 1 + (3+a) = 4+a$$

$$\vdots$$

$$f(60+a) = 1 + (60+a) = 61+a$$

$$\therefore f(1+a) + f(2+a) + f(3+a) + \dots + f(60+a) = 2250$$

$$(2+a) + (3+a) + (4+a) + \dots + (61+a) = 2250$$

$$[2+3+4+\dots+61] + \underbrace{[a+a+a+\dots+a]}_{60 \text{ ตัว}} = 2250$$

$$\frac{60}{2}(2+61) + 60a = 2250$$

นำ 60หาร 2 ข้าง

$$31.5+a = 37.5$$

$$\therefore a = 6$$

4. ตอบ 3

ให้ต้นทุนรวมเมื่อผลิตสินค้า x ชิ้นเป็น y และต้นทุนส่วนคงที่เป็น b บาท

สำหรับต้นทุนส่วนผันแปรกำหนดโดย ผลิต 1 ชิ้น ต้นทุน a บาท

แสดงว่า ถ้าผลิต x ชิ้น ต้นทุน ax บาท

จะได้ $y = ax + b$

จากโจทย์ $x = 600$, $y = 38,000$

$$\text{ได้ } 38,000 = 600a + b \quad \text{---(1)}$$

และ $x = 700$, $y = 43,000$

$$\text{ได้ } 43,000 = 700a + b \quad \text{---(2)}$$

$$(2) - (1) , 5,000 = 100a \rightarrow a = 50$$

แทน $a = 50$ ใน (1) ได้ $b = 8,000$

$$\therefore y = 50x + 8,000$$

ถ้าผลิตสินค้า 800 ชิ้น $\rightarrow x = 800$

$$y = 50(800) + 8,000 = 48,000$$

แสดงว่าต้นทุนคือ 48,000 บาท

$$\therefore \text{ต้นทุนต่อชิ้น} = \frac{48,000}{800} = 60 \text{ บาท}$$

$$\text{จะได้กำไร } 20\% \text{ เมื่อขายชิ้นละ } \frac{120}{100} \times 60 = 72 \text{ บาท}$$

5. ตอบ 2

ให้ y คือ กำไร โดยกำไร = รายรับ - ต้นทุน

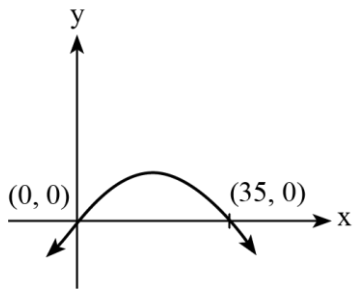
$$\begin{aligned}
 y &= (x^2 + 95x) - x \cdot (3x + 25) \\
 &= x^2 + 95x - 3x^2 - 25x \\
 &= -2x^2 + 70x
 \end{aligned}$$

วิธีที่ 1 เมื่อวาดกราฟพาราโบลา โดยหาจุดตัดแกน x (แทน $y = 0$) ได้

$$0 = -2x^2 + 70x$$

$$0 = x(-2x + 70) \rightarrow x = 0, 35$$

แสดงว่าจุดตัดคือ $(0, 0)$, $(35, 0)$



ช่วงที่กำไรคือ ช่วงที่ y เป็นบวกคือ $x = 1, 2, \dots, 34$ หรือก็คือ ไม่เกิน 34 ตัว

อีกวิธีคือ แก้อสมการ

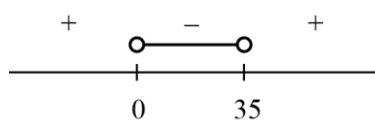
วิธีที่ 2 $y > 0$

$$-2x^2 + 70x > 0$$

คูณ -1

$$2x^2 - 70x < 0$$

$$(2x)(x - 35) < 0$$



จะได้ $x = 1, 2, 3, \dots, 34$ หรือก็คือไม่เกิน 34 ตัวเช่นกัน

6. ตอบ 1,750 บาท

ให้ y คือ รายรับ

และ x คือ จำนวนเงินที่ลดลงของค่าเช่า

จาก รายรับ = ค่าเช่า $\times$ จำนวนห้อง

$$y = (2,500 - x) \left(40 + 2 \cdot \frac{x}{50} \right)$$

$$\therefore y = (2,500 - x) \left(40 + \frac{x}{25} \right)$$

ได้กราฟพาราโบลา หาจุดตัดแกน x และวาดกราฟ

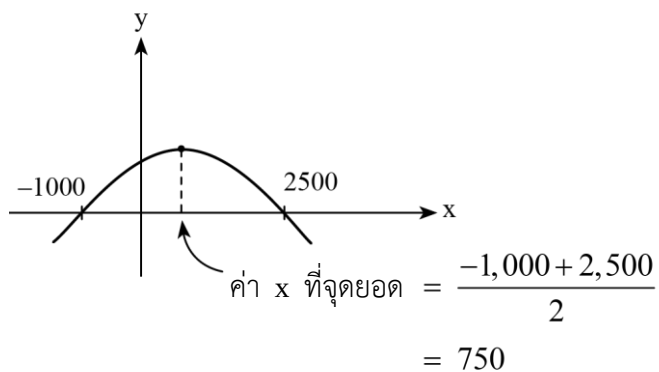
แทน $y = 0$

$$0 = (2,500 - x) \left(40 + \frac{x}{25} \right)$$

จะได้ $2,500 - x = 0$ หรือ $40 + \frac{x}{25} = 0$

$$x = 2,500, -1,000$$

$\therefore$ จุดตัดแกน x คือ $(-1,000, 0)$, $(2,500, 0)$



แสดงว่า y_{MAX} เมื่อ $x = 750$ $\therefore$ แสดงว่าค่าเช่าควรคิด = $2,500 - 750$
 $= 1,750$ บาท

7. ตอบ 2

$$\text{จาก } y_1 = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y_2 = f(y_1) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{\cancel{x-1}}}{\frac{x+1-(x-1)}{\cancel{x-1}}} = \frac{2x}{2} = x$$

$$y_3 = f(y_2) = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y_4 = f(y_3) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\text{ซึ่งจะได้ } y_1 = y_3 = y_5 = \dots = \frac{x+1}{x-1} \text{ และ } y_2 = y_4 = y_6 = \dots = x$$

$$\text{สรุปได้ } y_n = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & , n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ x & , n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

$$\therefore y_{2553} = \frac{x+1}{x-1} \text{ และ } y_{2010} = x$$

$$\begin{aligned} y_{2553} + y_{2010} &= \frac{x+1}{x-1} + x \\ &= \frac{x+1+x(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x+1+x^2-x}{x-1} \\ &= \frac{x^2+1}{x-1} \end{aligned}$$

8. ตอบ 4

อ่านโจทย์ต้องเข้าใจก่อนว่า แยกได้ 3 กรณี

$$1) \quad f(1, m) = 1 \text{ เช่น } f(1, 1) = f(1, 2) = f(1, 3) = \dots = 1$$

$$2) \quad f(n, m) = 0 \text{ เมื่อ } n > m$$

$$\text{เช่น } f(2, 1) = 0, f(3, 2) = 0, f(3, 1) = 0$$

$$3) \quad f(n, m+1) = f(n-1, m) + f(n, m) + f(n+1, m)$$

$$\text{เมื่อ } n, m \in \mathbb{N} \text{ และ } n \geq 2$$

$$\text{เช่น } f(3, 4) = f(2, 3) + f(3, 3) + f(4, 3)$$

$$(n = 3, m = 3)$$

สังเกตได้ว่า

$$1) \quad \text{ใช้หา } f(x, y) \text{ เมื่อ } x = 1$$

$$2) \quad \text{ใช้หา } f(x, y) \text{ เมื่อ } x > y$$

$$3) \quad \text{ใช้หา } f(x, y) \text{ เมื่อไม่เข้าเงื่อนไข 1), 2)}$$

$$\text{ซึ่งก็คือ } x \neq 1 \text{ และ } y \geq x$$

$$f(2, 4) = f(1, 3) + f(2, 3) + f(3, 3) \quad **$$

$$= 1 + 2 + 1 = 4$$

$$** \quad f(2, 3) = f(1, 2) + f(2, 2) + f(3, 2)$$

$$= 1 + 1 + 0$$

$$f(2, 2) = f(1, 1) + f(2, 1) + f(3, 1)$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

$$f(3, 3) = f(2, 2) + f(3, 2) + f(4, 2)$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

9. ตอบ 2,498

จาก $g(x) = x + 4$

Inv $x = y + 4$

$$y = x - 4$$

$$\therefore g^{-1}(x) = x - 4$$

$$\text{จะได้ } h(x) = \begin{cases} 5x + 3, & x \in A \\ x - 4, & x \notin A \end{cases}, A = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

สังเกตได้ว่าสมาชิกของ A คือ จำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

$$h(100) = 5(100) + 3 = 503$$

$\rightarrow$ 100 หารด้วย 3 เหลือเศษ 1 $\therefore 100 \in A$

$$h(h(100)) = h(503) = 503 - 4 = 499$$

$\rightarrow$ 503 หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 $\therefore 503 \notin A$

$$h(h(h(100))) = h(499) = 5(499) + 3 = 2498$$

$\rightarrow$ 499 หารด้วย 3 เหลือเศษ 1 $\therefore 499 \in A$

10. ตอบ 4

พิจารณา (ก) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{9-x})$, $x \leq 0$
 $= \sqrt{9-x} - 4$, $\sqrt{9-x} \geq 1$ *

$\therefore$ (ก) ถูก

* $x \leq 0 \rightarrow -x \geq 0 \rightarrow 9-x \geq 9 \rightarrow \sqrt{9-x} \geq 3$
 $\sqrt{9-x} \geq 3 \geq 1$
 $\sqrt{9-x} \geq 1$

พิจารณา (ข) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(7-x)$, $4 < x \leq 6$
 $= (7-x) - 4$, $1 \leq 7-x < 3$ *
 $= 3-x$

$\therefore$ (ข) ถูก

* $4 < x \leq 6 \rightarrow -4 > -x \geq -6 \rightarrow 3 > 7-x \geq 1$
 $1 \leq 7-x < 3$

พิจารณา (ค) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(7-x)$, $x > 6$
 $= (7-x) + 2$, $7-x < 1$
 $= 9-x$

$\therefore$ (ค) ถูก

* $x > 6 \rightarrow -x < -6 \rightarrow 7-x < 1$

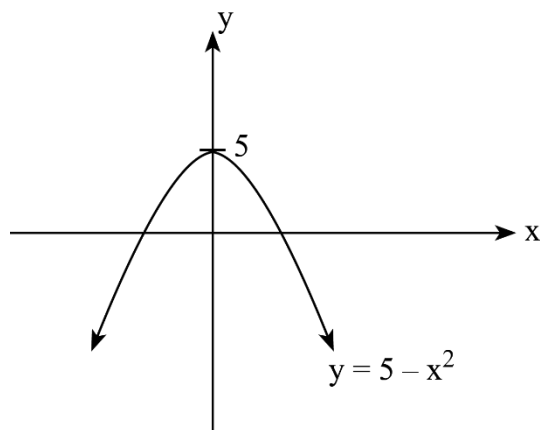
11. ตอบ 8

จากโจทย์ $f(x) = 5 - x^2$, $R_f = (-\infty, 5]$ *

$$\text{และ } g(x) = \begin{cases} f(x+1) = 5 - (x+1)^2, & x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(6) - (g \circ f)(3) &= f(g(6)) - g(f(3)) \quad ** \\ &= f(1) - g(-4) \quad *** \\ &= 4 - (-4) \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

* หา R_f



จากกราฟ $R_f = (-\infty, 5]$

$$** \quad g(6) = 1 \text{ และ } f(3) = 5 - (3)^2 = 5 - 9 = -4$$

$$*** \quad f(1) = 5 - 1^2 = 4 \text{ และ } g(-4) = 5 - (-4+1)^2 = -4$$

12. ตอบ 2

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x เมื่อ $f = g$

เพราะจะได้ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = (f \circ f)(x)$

จาก $f(x) = x^2 - x + a$ และ

$$g(x) = x^2 + bx$$

พบว่า $f = g$ เมื่อ $b = -1$ และ $a = 0$

โดยจะได้ว่า $f(x) = g(x) = x^2 - x$

$$\begin{aligned} \therefore f(b) + g(a) &= f(-1) + g(0) \\ &= (-1)^2 - (-1) + (0)^2 - (0) \\ &= 1 + 1 + 0 - 0 = 2 \end{aligned}$$

13. ตอบ 2

$$(f \circ g)(x+2) = 3x+6$$

$$\cancel{f}(g(x+2)) = 3x+6$$

$$g(\overset{\uparrow}{x+2}) = f^{-1}(\overset{\uparrow}{3x+6})$$

$$\qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$$

$$\qquad \qquad \qquad 0 \qquad \qquad \qquad 0$$

$$\therefore g(2) = f^{-1}(6)$$

$$= \frac{6}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

14. ตอบ 262

จาก $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 4$

$$\cancel{g}^{-1}(f^{-1}(a)) = 4$$

$$\cancel{f}^{-1}(a) = g(4)$$

$$a = f(g(4))$$

$$= f(9)$$

$$= 22$$

$$f \circ g(2a) = f \circ g(44)$$

$$= f(g(44))$$

$$= f(89)$$

$$= 3(89) - 5$$

$$= 262$$

$$g(x) = 2x+1$$

$$g(4) = 2(4) + 1 = 9$$

$$f(x) = 3x-5$$

$$f(9) = 3(9) - 5 = 22$$

$$g(x) = 2x+1$$

$$g(44) = 2(44) + 1 = 89$$

15. ตอบ 3

พิจารณา $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$

เราพบว่า กรณี $0 < x < 1$

$$\underbrace{|x - 1|}_{-} = -(x - 1) = 1 - x$$

$$\text{และ } \underbrace{|x + 1|}_{+} = x + 1$$

$$\therefore f(x) = (1 - x) + (x + 1) = 2$$

ดังนั้น ถ้า $0 < x < 1$ จะได้ $f(x) = 2$

จากเงื่อนไขว่า $a, b \in \mathbb{R}^+$ และ $a + b = 1$

เราพบว่า $0 < a < 1$ และ $0 < b < 1$

ดังนั้น $f(a) = 2$

$$\therefore (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(2) = \frac{2}{2^2 + 1} = \frac{2}{5}$$

เมื่อพิจารณา $(f \circ g)(b)$ จะได้

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f\left(\frac{b}{b^2 + 1}\right) = 2 \quad **$$

$$\text{ดังนั้น } (g \circ f)(a) + (f \circ g)(b) = \frac{2}{5} + 2 = 2.4$$

** จาก $0 < b < 1$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{b}{b^2 + 1} = \frac{\frac{b}{b}}{\frac{b^2}{b} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{b + \frac{1}{b}} < 1$$

อธิบาย $0 < b < 1 \rightarrow \frac{1}{b} > 1$ เช่น $b = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{b} = 2$

$$\text{และ } b + \frac{1}{b} > 1 \quad \therefore \frac{1}{b + \frac{1}{b}} < 1$$

16. ตอบ 1

จาก $g(x) = 6x+5$ จะได้ว่า

$$\text{Inv } (x \Rightarrow y)$$

$$x = 6y+5$$

$$y = \frac{x-5}{6}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = \frac{x-5}{6}$$

ดังนั้น $g(f(a)) = g^{-1}(f(a))$

$$6f(a)+5 = \frac{f(a)-5}{6}$$

$$36f(a)+30 = f(a)-5$$

$$35f(a) = -35$$

$$f(a) = -1$$

$$\frac{a+1}{a-1} = -1$$

$$a+1 = -a+1$$

$$2a = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\begin{aligned} f(g^{-1}(a)) &= f(g^{-1}(0)) = f\left(\frac{0-5}{6}\right) = f\left(-\frac{5}{6}\right) \\ &= \frac{-\frac{5}{6}+1}{-\frac{5}{6}-1} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{11}{6}} = -\frac{1}{11} \end{aligned}$$

$$f(g(a)) = f(g(0)) = f(5) = \frac{5+1}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore f(g^{-1}(a)) + f(g(a)) = -\frac{1}{11} + \frac{3}{2} = \frac{31}{22}$$

17. ตอบ 4

พิจารณา ก. $f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 แทน x ด้วย -5 $-5 \quad -5 \quad -5 \quad -5$
 $f(0) = (-5)^3 - (-5)^2 + 2(-5)$
 $\therefore f(0) = -125 - 25 - 10 = -160$

และจาก $g^{-1}(2x-1) = x+4$
 $2x-1 = g(x+4)$
 $g(x+4) = 2x-1$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 แทน x ด้วย -4 $-4 \quad -4$
 $\therefore g(0) = 2(-4) - 1 = -9$

$(f-g)(0) = f(0) - g(0) = -160 - (-9) = -151$

ดังนั้น $(f-g)(0) \neq -169$ ก. ผิด

พิจารณา ข. $(g \circ f)(x) + 5 = 0, x \in I$
 $(g \circ f)(x) = -5$
 $g(f(x)) = -5$
 $f(x) = g^{-1}(-5) *$
 $f(x) = 2$
 $x = f^{-1}(2) **$
 $x = 6$

$6 \in \{x \in I / (g \circ f)(x) + 5 = 0\} \therefore$ ข. ผิด

* จาก $g^{-1}(2x-1) = x+4$ $\therefore g^{-1}(-5) = 2$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $-2 \quad -2$

** จาก $f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x$
 $x+5 = f^{-1}(x^3 - x^2 + 2x)$
 $f^{-1}(x^3 - x^2 + 2x) = x+5$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 แทน x ด้วย 1 $1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$f^{-1}(1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1) = 1+5$

$f^{-1}(2) = 6$

18. ตอบ 2

จาก $(f^{-1} \circ g)(x) = 4x$

$$f^{-1}(g(x)) = 4x$$

$$g(x) = f(4x)$$

จาก $f(x) = 2x - 5 \quad \therefore g(x) = 2(4x) - 5$
 $= 8x - 5$

จาก $(g \circ h)(x)$ หาด้วย $x - 1$ เหลือเศษ -21

$$(g \circ h)(1) = -21$$

$$g(h(1)) = -21$$

$$8h(1) - 5 = -21 \quad \therefore h(1) = -2$$

แทน $x = c + 1$ ใน $h(x - c) = x^3 - 3x^2 - 2$

$$h(c + 1 - c) = (c + 1)^3 - 3(c + 1)^2 - 2$$

$$-2 = (c + 1)^3 - 3(c + 1)^2 - 2$$

$$(c + 1)^3 - 3(c + 1)^2 = 0$$

$$(c + 1)^2((c + 1) - 3) = 0$$

$$(c + 1)^2(c - 2) = 0$$

$$c = \cancel{1}, 2$$

พิจารณา (ก) $(f \circ h)(c) = (f \circ h)(2)$

$$= f(h(2))$$

$$= f(14)$$

$$= 2(14) - 5 = 23 \quad (\text{ก}) \text{ ถูก}$$

* $h(x - c) = x^3 - 3x^2 - 2$

เมื่อ $c = 2 \rightarrow h(x - 2) = x^3 - 3x^2 - 2$

แทน $x = 4, h(2) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 2 = 14$

พิจารณา (ข) $(h + g)(c) = (h + g)(2)$

$$= h(2) + g(2)$$

$$= 14 + (8(2) - 5)$$

$$= 25$$

(ข) ผิด

19. ตอบ 4

จากโจทย์ พิจารณา $f \rightarrow y + x = |x|$

$$y = |x| - x$$

$$f(x) = |x| - x$$

$$f(x) = \begin{cases} x - x = 0 & , x \geq 0 \\ -x - x = -2x & , x < 0 \end{cases}$$

พิจารณา $g \rightarrow y - x = |x|$

$$y = |x| + x$$

$$g(x) = |x| + x$$

$$g(x) = \begin{cases} x + x = 2x & , x \geq 0 \\ -x + x = 0 & , x < 0 \end{cases}$$

พิจารณา (ก)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(\underbrace{2x}) = 0 & , x \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ f(0) = 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = 0$$

$$(g \circ (f \circ g))(x) = g((f \circ g)(x)) = g(0) = 2(0) = 0$$

$$((f \circ g) \circ g)(x) = (f \circ g)(g(x)) = 0$$

$$\therefore g \circ (f \circ g) = (f \circ g) \circ g \rightarrow (ก) \text{ ถูก }$$

พิจารณา (ข)

$$\begin{aligned}
 ((\text{gof}) - f)(x) &= (\text{gof})(x) - f(x) \\
 &= g(f(x)) - f(x) \\
 &= \begin{cases} g(0) - 0 & = 2(0) - 0, \quad x \geq 0 \\ \underbrace{g(-2x)}_{-2x > 0} - (-2x) = 2(-2x) + 2x, \quad x < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ((\text{fog}) + f)(x) &= (\text{fog})(x) + f(x) \\
 &= \begin{cases} 0 + 0, & x \geq 0 \\ 0 + (-2x), & x < 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{gof}) - f = (\text{fog}) + f \rightarrow (\text{ข}) \text{ ถูก }$$

พิจารณา (ค)

$$\begin{aligned}
 \text{fo}(\text{fog})(x) &= f(\text{fog}(x)) \\
 &= f(0) = 0 \\
 (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
 &= \begin{cases} 0 \cdot 2x = 0, & x \geq 0 \\ -2x \cdot 0 = 0, & x < 0 \end{cases} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{fo}(\text{fog}) = f \cdot g \rightarrow (\text{ค}) \text{ ถูก }$$

20. ตอบ 2

จาก $g(1+x) = x(2+x)$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $x-1$ $x-1$ $x-1$

แทน x ด้วย $x-1$

$$g(1+x-1) = (x-1)(2+x-1)$$

$$g(x) = (x-1)(1+x) = x^2 - 1$$

และจาก $fog(x) = x^2 + 1$

$$f(g(x)) = x^2 + 1$$

$$f(\overset{\textcircled{x^2}}{x^2} - 1) = \overset{\textcircled{x^2}}{x^2} + 1$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x+1$ $x+1$

แทน x^2 ด้วย $x+1$

$$f(x+1-1) = (x+1) + 1$$

$$f(x) = x + 2$$

พิจารณา (ก)

$$(gof)(x) = (fog)(x)$$

$$g(f(x)) = f(g(x))$$

$$g(x+2) = f(x^2-1)$$

$$(x+2)^2 - 1 = (x^2-1) + 2$$

$$x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 1$$

$$4x = -2 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \{x \in \mathbb{R} / (gof)(x) = (fog)(x)\} = \{-\frac{1}{2}\} \quad (\text{ก}) \text{ ผิด}$$

พิจารณา (ข)

$$(gof)(x) + 1 \geq 0$$

จาก (ก) $[(x+2)^2 - 1] + 1 \geq 0$

$$(x+2)^2 \geq 0 \quad \text{จริงเสมอ}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนจริง $x \geq -1$ ทำให้สมการนี้เป็นจริง $\therefore$ (ข) ถูก

พิจารณา (ค)

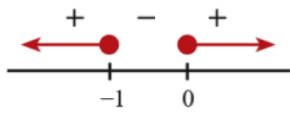
$$(f+g)(x) \geq 1$$

$$f(x) + g(x) \geq 1$$

$$(x+2)+(x^2-1) \geq 1$$

$$x^2 + x \geq 0$$

$$(x)(x+1) \geq 0$$



ดังนั้น เราพบว่า มี x บางจำนวนที่ $x \geq -1$ ที่ทำให้สมการเป็นเท็จ เช่น $x = -0.5$

$\therefore$ (ค) ผิด

ADDITIONAL PROBLEMS เรื่อง ลำดับและอนุกรม

1. ตอบ 1

$$(x+3)^2 + (x+3)^4 + (x+3)^6 + \dots + (x+3)^{2n} + \dots$$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $r = (x+3)^2$

และจะเป็นอนุกรมลู่เข้า (คอนเวอร์เจนต์) เมื่อ $|r| < 1$

$$\text{ดังนั้น } |(x+3)^2| < 1 \rightarrow (x+3)^2 < 1 \rightarrow (x+3)^2 - 1 < 0$$

$$(x+3-1)(x+3+1) < 0 \rightarrow (x+2)(x+4) < 0 \rightarrow -4 < x < -2$$

$\therefore$ อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $x \in (-4, -2)$

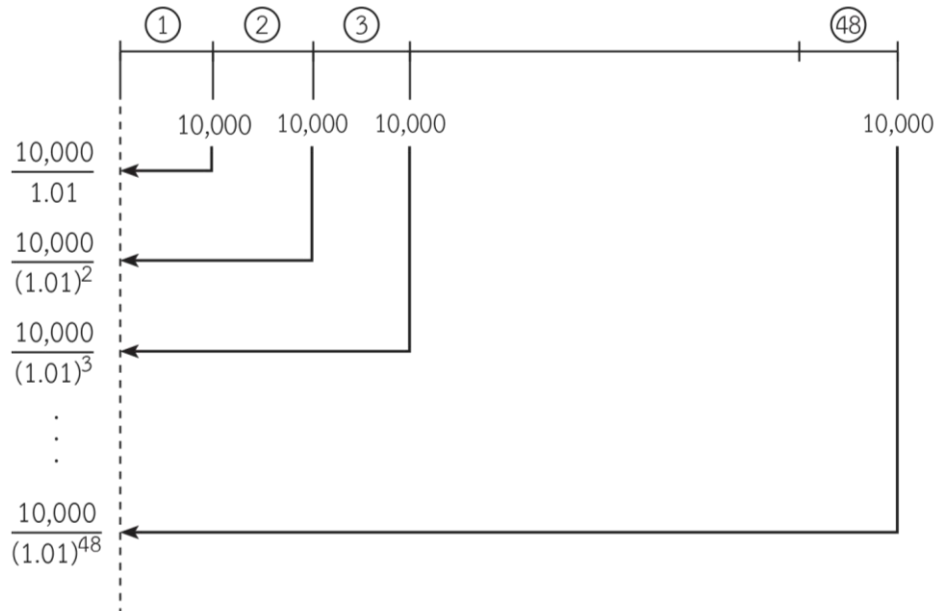
2. ตอบ 4

$$\text{จากโจทย์ } a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \rightarrow a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_{n-1}a_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}a_{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_6} \right) + \left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_7} \right) + \left(\frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_8} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3. ตอบ 4

ขั้นที่ 1 รวมเงินผ่อนทั้งหมดโดยเปลี่ยนให้เป็นเงิน ณ ปัจจุบัน (PV)



$$\begin{aligned}
 \text{เงินผ่อน (PV)} &= \frac{10,000}{1.01} + \frac{10,000}{(1.01)^2} + \frac{10,000}{(1.01)^3} + \dots + \frac{10,000}{(1.01)^{48}} \\
 &= \frac{\frac{10,000}{1.01} \left(1 - \left(\frac{1}{1.01} \right)^{48} \right)}{1 - \frac{1}{1.01}} \quad ** \\
 &= \frac{10,000 \left(\frac{1}{1.01} - \left(\frac{1}{1.01} \right)^{49} \right)}{1 - \frac{1}{1.01}} \\
 &= \frac{10,000 \left((1.01)^{-1} - (1.01)^{-49} \right)}{1 - (1.01)^{-1}}
 \end{aligned}$$

** จาก $S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$

โดย $a_1 = \frac{10,000}{1.01}$, $r = \frac{1}{1.01}$ และ $n = 48$

ขั้นที่ 2 จากสมการ

ราคาคอนโด = เงินดาวน์ + เงินผ่อน (PV)

$\therefore$ เงินดาวน์ = ราคาคอนโด - เงินผ่อน (PV)

$$= 600,000 - \frac{10,000 \left((1.01)^{-1} - (1.01)^{-49} \right)}{1 - (1.01)^{-1}}$$

4. ตอบ 3

จากโจทย์ $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, $a_2 = \frac{1+2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, $a_3 = \frac{1+2+3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

จะได้ว่า $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$a_n = \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$$

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4-3} \left(\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{6}$$

5. ตอบ 5

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20 \rightarrow a_1 + 5d + a_1 + 8d + a_{20} - 8d + a_{20} - 5d = 20 \rightarrow a_1 + a_{20} = 10$$

$$\sum_{i=1}^{20} (a_i - m)^2 \text{ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ } m = \bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}}{20}$$

$$= \frac{\frac{20}{2}(a_1 + a_{20})}{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

6. ตอบ $\frac{4}{13}$

จากโจทย์ $S_n = n(n+1)(n+2)$

ดังนั้น $a_n = S_n - S_{n-1} = n(n+1)(n+2) - (n-1)(n)(n+1)$

$$a_n = n(n+1)[(n+2) - (n-1)]$$

$$a_n = 3n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{3n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{12} \left[\frac{(n+1) - n}{n(n+1)} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{12 \cdot 13} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{12} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2-1} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{13} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{12}{13} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{13} \right] = \frac{4}{13} = \frac{4}{13}$$

7. ตอบ 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{8}} \cdot 2^{\frac{7}{16}} \cdot 2^{\frac{9}{32}} \cdot \dots \cdot (2^{2n+1})^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

$$= 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{8}} \cdot 2^{\frac{7}{16}} \cdot 2^{\frac{9}{32}} \cdot \dots$$

$$= 2^{\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \dots}$$

$$= 2^{S_{\infty}} \text{ เมื่อ } S_{\infty} = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \dots$$

หา S_{∞} จาก

$$S_{\infty} = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \dots$$

$$\frac{1}{2} S_{\infty} = \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} + \dots$$

$$\frac{1}{2} S_{\infty} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\frac{1}{2} S_{\infty} = \frac{3}{4} + \left[\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$S_{\infty} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 8^{\frac{1}{4}} \cdot 32^{\frac{1}{8}} \cdot 128^{\frac{1}{16}} \cdot 512^{\frac{1}{32}} \cdot \dots \cdot (2^{2n+1})^{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2^{S_{\infty}} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

8. ตอบ 2

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \right]^{2n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \right)^2 \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \right)^n \\
 &= \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \right)^0 + \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \right)^1 + \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \right)^2 + \dots \\
 &= 1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \right)^2 + \dots \quad r = 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \\
 &= \frac{1}{1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\cos 2 \left(\frac{\pi}{12} \right)} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

$$* \cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A \rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \cos 2 \left(\frac{\pi}{12} \right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

9. ตอบ 2

$$\text{จาก } a_n = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\text{ข้อมูลคือ } \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{m(m+1)}$$

พิจารณา แยกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1

m เป็นจำนวนคี่ (มีข้อมูลคี่ตัว) ให้ Med คือข้อมูลตัวตรงกลาง โดย $\text{Med} = \frac{1}{k(k+1)}$

เราพบว่า $\frac{1}{120} = \frac{1}{k(k+1)}$ ไม่สามารถหา k ที่เป็นจำนวนเต็มบวกได้

ดังนั้น m ไม่เป็นจำนวนคี่

กรณีที่ 2

m เป็นจำนวนคู่ (มีข้อมูลคู่ตัว) ให้ Med อยู่ระหว่างข้อมูลตรงกลาง 2 ตัว

$$\text{คือ } \frac{1}{k(k+1)}, \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

โดย
$$\text{Med} = \frac{\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}}{2}$$

$$\frac{1}{120} = \frac{\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}}{2}$$

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{60} = \frac{(k+2) + k}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{60} = \frac{2(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

$$k^2 + 2k = 120$$

$$k^2 + 2k - 120 = 0$$

$$(k+12)(k-10) = 0$$

$$k = -12, 10$$

แสดงว่า Med อยู่ระหว่าง $\frac{1}{10 \cdot 11}$ กับ $\frac{1}{11 \cdot 12}$

ดังนั้นข้อมูลทั้งหมดคือ

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{10 \cdot 11}}_{10 \text{ ตัว}}, \text{Med} \downarrow, \underbrace{\frac{1}{11 \cdot 12}, \dots, \frac{1}{m(m+1)}}_{10 \text{ ตัว}}$$

เราพบว่า ข้อมูลตั้งแต่ $\frac{1}{1 \cdot 2}$ ถึง $\frac{1}{10 \cdot 11}$ มี 10 ตัว

ดังนั้น $\frac{1}{11 \cdot 12}$ ถึง $\frac{1}{m(m+1)}$ ก็จะมี 10 ตัว เช่นกัน

ดังนั้น $m = 20$ (ข้อมูลมี 20 ตัว)

$$\begin{aligned} \text{และ } \mu &= \frac{\Sigma x}{N} = \frac{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{20 \cdot 21}}{20} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \dots + \left[\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right]}{20} \\ &= \frac{\frac{1}{1} - \frac{1}{21}}{20} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

10. **ตอบ 4**

นำอนุกรมของโจทย์มาเขียนใหม่ดังนี้

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \dots \quad \text{มี } a_i = 1 - \frac{1}{2^i}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$$

$$= n - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right]$$

$$= n - \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$S_{2n} = 2n - 1 + \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1 + \frac{1}{2^n}}{2n - 1 + \frac{1}{2^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

11. **ตอบ 1**

$$a_1 = 5, a_{50} = 103 \rightarrow a_{50} - a_1 = 103 - 5 \rightarrow 49d = 98 \rightarrow d = 2$$

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{49}^2 - a_{50}^2$$

$$= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + \dots + (a_{49} - a_{50})(a_{49} + a_{50})$$

$$= (-d)(a_1 + a_2) + (-d)(a_3 + a_4) + \dots + (-d)(a_{49} + a_{50})$$

$$= (-d)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{49} + a_{50})$$

$$= (-2) \left[\frac{50}{2} (a_1 + a_{50}) \right] = -50(5 + 103) = -5,400$$

12. **ตอบ** 5

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนเต็มบวก

แสดงว่า ทุกพจน์ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก สมมติให้อัตราส่วนร่วมมีค่าเท่ากับ r

จากโจทย์ $a_3 = 18$

$$a_2 + a_4 = 60 \rightarrow \frac{a_3}{r} + a_3 r = 60 \rightarrow \frac{18}{r} + 18r = 60 \rightarrow r + \frac{1}{r} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{r^2 + 1}{r} = \frac{10}{3} \rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \rightarrow (3r-1)(r-3) = 0 \rightarrow r = \frac{1}{3}, 3$$

ถ้า $r = \frac{1}{3}$, $a_4 = a_3 r = 18\left(\frac{1}{3}\right) = 6$, $a_5 = a_4 r = 6\left(\frac{1}{3}\right) = 2$

$$a_6 = a_5 r = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \text{ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

ดังนั้น $r = 3$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S_8}{S_4} + \frac{S_4}{S_2} &= \frac{\frac{a_1(1-r^8)}{1-r}}{\frac{a_1(1-r^4)}{1-r}} + \frac{\frac{a_1(1-r^4)}{1-r}}{\frac{a_1(1-r^2)}{1-r}} \\ &= \frac{1-r^8}{1-r^4} + \frac{1-r^4}{1-r^2} = 1+r^4 + 1+r^2 = 2+3^4+3^2 = 92 \end{aligned}$$

13. **ตอบ** 59

$$S_n = 3n^2 + 2n \text{ จะได้ว่า } a_n = 6n-1 \rightarrow a_{2^K} = 6(2^K)-1$$

$$m = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2^2}a_{2^2} + \frac{1}{2^3}a_{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}a_{2^{10}}$$

$$m = \sum_{K=1}^{10} \frac{1}{2^K} a_{2^K} = \sum_{K=1}^{10} \frac{1}{2^K} [6(2^K)-1]$$

$$m = \sum_{K=1}^{10} \left(6 - \frac{1}{2^K}\right) = \sum_{K=1}^{10} 6 - \sum_{K=1}^{10} \frac{1}{2^K}$$

$$m = 60 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$m = 60 - \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$m = 60 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 59 + \frac{1}{1024}$$

$\therefore$ จำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่น้อยกว่า m คือ 59

14. ตอบ 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{2} \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{a_1}{1-r} = \frac{3}{2} \rightarrow (1)(2) = 3-3r$$

$$r = \frac{1}{3} \text{ จะได้ } a_n = a_1 r^{n-1} = (1) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5 \rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 5 \rightarrow \frac{b_1}{1-r} = 5 \rightarrow 7 = 5-5r$$

$$r = -\frac{2}{5} \text{ จะได้ } b_n = b_1 r^{n-1} = (7) \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}}{7 \left(-\frac{2}{5} \right)^{n-1}} = \frac{1}{7} \left(-\frac{5}{6} \right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) &= \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{6} \right)^{n-1} = \frac{1}{7} \left[1 - \frac{5}{6} + \frac{25}{36} - \dots \right] \\ &= \frac{1}{7} \left(\frac{1}{1 - (-\frac{5}{6})} \right) = \frac{6}{77} \end{aligned}$$

15. ตอบ 52

$$a_8 = a_1 + 7d \rightarrow 36 = 1 + 7d \rightarrow d = 5$$

ลำดับเลขคณิตชุดนี้ คือ 1, 6, 11, 16,, $5n-4$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = 3$$

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{a_4 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = 3$$

$$\frac{1}{d} \left[\cancel{\sqrt{a_2}} - \sqrt{a_1} + \cancel{\sqrt{a_3}} - \cancel{\sqrt{a_2}} + \cancel{\sqrt{a_4}} - \cancel{\sqrt{a_3}} + \dots + \sqrt{a_n} - \cancel{\sqrt{a_{n-1}}} \right] = 3$$

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1} = 3(d) = 3(5) = 15$$

$$\sqrt{5n-4} = 16$$

$$5n-4 = 256$$

$$\therefore n = 52$$

16. ตอบ 4

$\sum_{i=1}^n i$, $\frac{\sqrt{10}}{3} \sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i^3$ เป็นลำดับเรขาคณิต จะได้ว่า

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{3} \sum_{i=1}^n i^2 \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{i=1}^n i^3 \right)$$

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right]^2 = \frac{n}{2} (n+1) \left[\frac{n}{2} (n+1) \right]^2$$

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{n^2}{36} (n+1)^2 (2n+1)^2 = \frac{n^3}{8} (n+1)^3$$

$$\frac{5}{9 \cdot 18} (2n+1)^2 = \frac{1}{8} n(n+1)$$

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 18} (4n^2 + 4n + 1) = n^2 + n$$

$$20(4n^2 + 4n + 1) = 81n^2 + 81n$$

$$n^2 + n - 20 = 0$$

$$(n+5)(n-4) = 0$$

$$\therefore n = 4$$

17. ตอบ 36

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \rightarrow (n-1)a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \text{ โดยที่ } n \geq 3$$

$$\text{แทน } n = 3 : 2a_3 = a_1 + a_2 \rightarrow a_3 = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{แทน } n = 4 : 3a_4 = a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow 3a_4 = 3a_3 \rightarrow a_4 = a_3 = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{แทน } n = 5 : 4a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \rightarrow 4a_5 = 4a_4 \rightarrow a_5 = a_4 = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{แสดงว่า ตั้งแต่ } n \geq 3 \text{ แล้ว } a_3 = a_4 = a_5 = \dots = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{จากโจทย์ } \sum_{i=1}^{10} a_i = \frac{30}{8}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \frac{30}{8}$$

$$10a_{11} = \frac{30}{8} \rightarrow a_{11} = \frac{3}{8} \rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{3}{8} \rightarrow a+b = \frac{3}{4} \quad \text{---(1)}$$

$$\text{และ } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = \frac{31}{8}$$

$$a + 2b + 7\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{31}{8} \rightarrow a + 2b + \frac{21}{8} = \frac{31}{8} \rightarrow a + 2b = \frac{5}{4} \quad \text{---(2)}$$

$$\frac{3}{8}$$

$$(2)-(1) : b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ จะได้ } a = \frac{1}{4} \quad \therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = (4+2)^2 = 36$$

18. ตอบ 3

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

$$\text{จะได้ว่า } a_{20} = a_{10} + 10d \rightarrow a_{10} + 30 = a_{10} + 10d \rightarrow d = 3$$

$$\text{จากโจทย์ } S_4 = 14 \rightarrow \frac{4}{2}[2a_1 + (4-1)d] = 14 \rightarrow 2a_1 + 3(3) = 7$$

$$\text{จะได้ } a_1 = -1 \text{ ดังนั้น } a_n = 3n - 4 \text{ และ } a_3 = 5$$

จากโจทย์ $b_{n+1} - b_n = 1$ แสดงว่า $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

ที่มีผลต่างร่วม (d) = 1 และมี $b_1 = a_3 = 5$ ดังนั้น $b_n = n + 4$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-4}{n+4} = 3$$

19. ตอบ 3

$2a + 1, 2b - 1, 3b - a, a + 3b$ เป็นลำดับเลขคณิตจะได้ว่า

$$(2a + 1) + (3b - a) = 2(2b - 1) \rightarrow a - b = -3 \text{ _____(1)}$$

$$(2b - 1) + (a + 3b) = 2(3b - a) \rightarrow 3a - b = 1 \text{ _____(2)}$$

$$(2) - (1) \text{ จะได้ } 2a = 4 \rightarrow a = 2 \text{ แทน } a = 2 \text{ ลงใน (1) จะได้ } b = 5$$

ดังนั้นลำดับเลขคณิตชุดนี้ คือ 5, 9, 13, 17, มี $d = 4$

$$\therefore a_{1000} = a_1 + (1000 - 1)d = 5 + (1000 - 1)(4) = 4001$$

20. ตอบ 205

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเป็น d_a

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมเป็น d_b

$$\text{จากโจทย์ } a_5 - a_1 = b_5 - b_2 \rightarrow 4d_a = 3d_b \rightarrow \frac{d_b}{d_a} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{(b_5 - b_4) + (b_4 - b_1)}{a_4 - a_2} = \frac{2d_b + 5d_b}{2d_a} = \frac{7(d_b)}{2(d_a)} = \frac{7}{2} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{14}{3}$$

เนื่องจาก ห.ร.ม ของ x กับ y เท่ากับ 1 ดังนั้น $x = 14, y = 3$

$$\therefore x^2 + y^2 = 14^2 + 3^2 = 196 + 9 = 205$$

21. ตอบ a

จากโจทย์ $x(y-z)$, $y(z-x)$, $z(x-y)$ เป็นลำดับเรขาคณิตมีอัตราส่วนร่วมเป็น r

$$\text{ให้ } a_1 = x(y-z) = xy - xz$$

$$a_2 = y(z-x) = yz - xy$$

$$a_3 = z(x-y) = xz - yz$$

$$\text{จะได้ว่า } a_1 + a_2 + a_3 = 0 \rightarrow a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 0 \rightarrow 1 + r + r^2 = 0$$

$$\therefore r \text{ สอดคล้องกับสมการ } r^2 + r + 1 = 0$$

22. ตอบ 1

จากโจทย์ $a_{n+1} = n^2 - a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{แทน } n=1 \text{ จะได้ } a_2 = 1 - a_1$$

$$\text{แทน } n=2 \text{ จะได้ } a_3 = 4 - a_2 = 4 - (1 - a_1) = 3 + a_1 = (1 + 2) + a_1$$

$$\text{แทน } n=3 \text{ จะได้ } a_4 = 9 - a_3 = 9 - (3 + a_1) = 6 - a_1 = (1 + 2 + 3) - a_1$$

$$\text{แทน } n=4 \text{ จะได้ } a_5 = 16 - a_4 = 16 - (6 - a_1) = 10 + a_1 = (1 + 2 + 3 + 4) + a_1$$

$$\text{แทน } n=100 \text{ จะได้ } a_{101} = (1 + 2 + 3 + \dots + 100) + a_1$$

$$5100 = \frac{100}{2} (100 + 1) + a_1 = 5050 + a_1$$

$$\therefore a_1 = 50$$

23. ตอบ 4

$$\text{จากโจทย์ } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)(n)(n+1)}{6}$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{6} [(n+2) - (n-1)] = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{99} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) \\ &= 2 \left[\frac{1}{2-1} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{100} \right) \right] = 2 \left(\frac{99}{100} \right) \\ &= \frac{198}{100} = 1.98 \end{aligned}$$

24. **ตอบ** 84

โจทย์กำหนด a, b, c เป็น G.S สมมติให้อัตราส่วนร่วมเป็น r

จะได้ว่า $a = \frac{b}{r}$ และ $c = br$

จากโจทย์ $a, b+3, c+4$ เป็น A.S

จะได้ว่า $a + (c+4) = 2(b+3)$

$$a + c = 2b + 2$$

$$14 - b = 2b + 2, \boxed{a + b + c = 14 \rightarrow a + c = 14 - b}$$

$$b = 4$$

$$\text{จาก } a + b + c = 14 \rightarrow \frac{b}{r} + b + br = 14 \rightarrow \frac{4}{r} + 4 + 4r = 14$$

$$4 + 4r^2 = 10r \rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \rightarrow (2r-1)(r-2) = 0 \rightarrow r = \frac{1}{2}, 2$$

กรณีที่ 1 $r = \frac{1}{2}$ จะได้ a, b, c คือ 8, 4, 2

กรณีที่ 2 $r = 2$ จะได้ a, b, c คือ 2, 4, 8

$$\text{จากทั้ง 2 กรณี จะได้ว่า } a^2 + b^2 + c^2 = \begin{cases} 8^2 + 4^2 + 2^2 = 84 \\ 2^2 + 4^2 + 8^2 = 84 \end{cases}$$

25. **ตอบ** 5

จากโจทย์ $A = \{104, 109, 114, \dots, 999\}$

พบว่าสมาชิกในเซต A เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต มี $d = 5, a_1 = 104, a_n = 999$

หาจำนวนสมาชิกทั้งหมดในเซต A จาก $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 999 = 104 + (n-1)(5)$

$$n = 180$$

ดังนั้น ผลบวกของสมาชิกทุกตัวของ $A = 104 + 109 + 114 + \dots + 999$

$$= \frac{180}{2} (104 + 999)$$

$$= 99,270$$

ADDITIONAL PROBLEMS เรื่อง TGAT2-3

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1. <u>ตอบ</u> 4 | 16. <u>ตอบ</u> 1 |
| 2. <u>ตอบ</u> 3 | 17. <u>ตอบ</u> 5 |
| 3. <u>ตอบ</u> 5 | 18. <u>ตอบ</u> 3 |
| 4. <u>ตอบ</u> 2 | 19. <u>ตอบ</u> 5 |
| 5. <u>ตอบ</u> 3 | 20. <u>ตอบ</u> 2 |
| 6. <u>ตอบ</u> 3 | 21. <u>ตอบ</u> 3 |
| 7. <u>ตอบ</u> 1 | 22. <u>ตอบ</u> 4 |
| 8. <u>ตอบ</u> 2 | 23. <u>ตอบ</u> 2 |
| 9. <u>ตอบ</u> 3 | 24. <u>ตอบ</u> 2 |
| 10. <u>ตอบ</u> 3 | 25. <u>ตอบ</u> 3 |
| 11. <u>ตอบ</u> 5 | 26. <u>ตอบ</u> 4 |
| 12. <u>ตอบ</u> 3 | 27. <u>ตอบ</u> 3, 4 |
| 13. <u>ตอบ</u> 4 | 28. <u>ตอบ</u> 2 |
| 14. <u>ตอบ</u> 1 | 29. <u>ตอบ</u> 3 |
| 15. <u>ตอบ</u> 1 | 30. <u>ตอบ</u> 1, 2 |
