เฉลยข้อสอบ ความถนัดทางคณิตศาสตร์ PAT 1

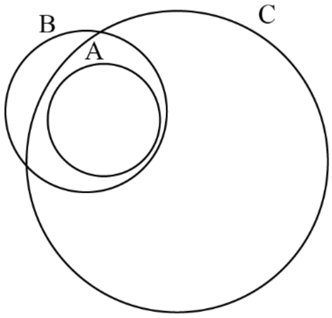
<u>ตอนที่ 1</u> : แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้องที่สุด
จำนวน 35 ข้อ (ข้อ 1 - 35) ข้อละ 6 คะแนน

1. **<u>ตอบ</u>** 5

<u>วิธีทำ</u>

ข้อความ ก. : จาก $A \subset B$ และ $B \not\subset C$

วิธีที่ 1 วาดแผนภาพเวนน์ ออยเลอร์ ดังรูป



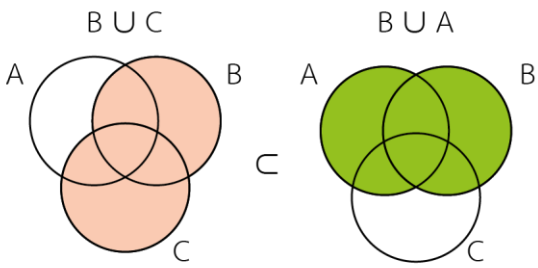
พบว่า $A \subset C$ ได้ ดังนั้นข้อความ ก. ผิด

วิธีที่ 2 ใช้การสมมุติเซตช่วย ให้ $A = \{1\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 2\}$

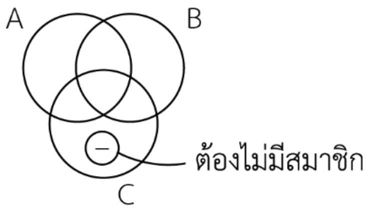
พบว่า $A \subset B$ และ $B \not\subset C$ ตามที่โจทย์กำหนด

แต่ $A \subset C$ ซึ่งขัดแย้งกับข้อสรุปของโจทย์ ดังนั้นข้อความ ก. ผิด

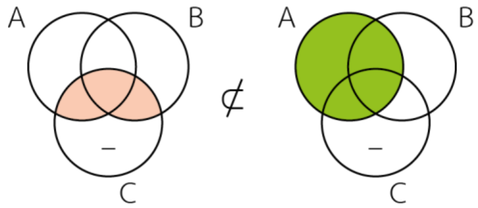
ข้อความ ข. : มีเซตมาเกี่ยวข้อง 3 เซต



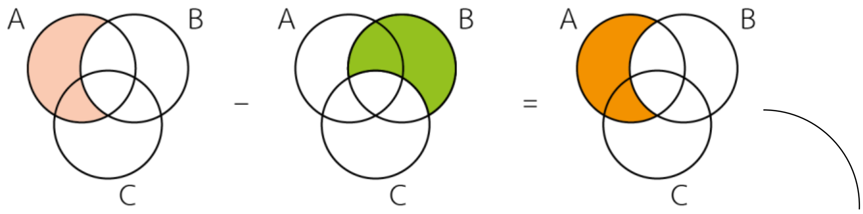
จะเป็นจริงเมื่อ



จากข้อสรุป พบว่า $C \not\subset A$ ดังนั้นข้อความ ข. ผิด



ข้อความ ค. : มีเซตมาเกี่ยวข้อง 3 เซต

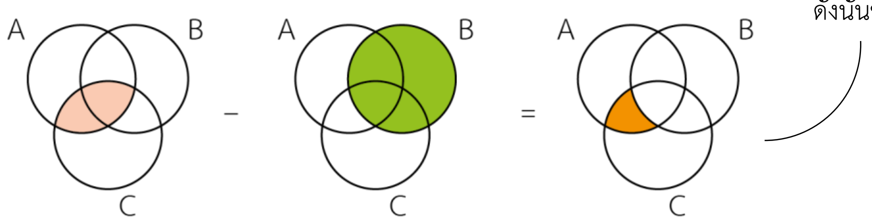


(A − B) − (B − C)

พบว่า

$(A-B)-(B-C) \neq (A \cap C) - B$

ดังนั้นข้อความ ค. ผิด

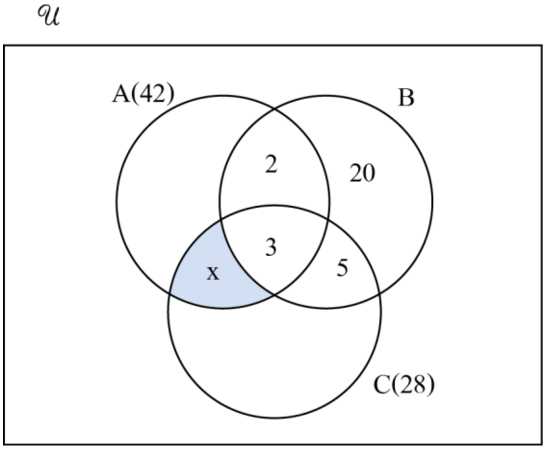


(A ∩ C) − B

∴ ผิดทั้งสามข้อความ

2. **<u>ตอบ</u>** 4

<u>วิธีทำ</u> มีเซต 3 เซตมาเกี่ยวข้อง



จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้

$n(A \cap B \cap C) = 3$, $n(B \cap C) = 8$

และ $n\big((A \cap B) - C\big) = 2$

และ $A' \cap B \cap C' = B \cap (A \cup C)'$

$= B - (A \cup C)$

ดังนั้น $n(A' \cap B \cap C') = n\big(B - (A \cup C)\big)$

จะได้ $n\big(B - (A \cup C)\big) = 20$

สามารถเติมแผนภาพได้ ดังรูป และ จะพบว่า

$n(A \cup C) = n(A \cup B \cup C) - 20$

$n(A \cup C) = 80 - 20 \qquad \therefore\ n(A \cup C) = 60$

ให้ x คือ จำนวนสมาชิกของบริเวณดังแผนภาพ

$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$

$60 = 42 + 28 - (x + 3) \qquad \therefore\ x = 7$

เนื่องจาก $A \cap B' \cap C = (A \cap C) \cap B'$

$= (A \cap C) - B$

$\therefore\ n(A \cap B' \cap C) = n\big((A \cap C) - B\big) = x = 7$

3. **<u>ตอบ</u>** 4

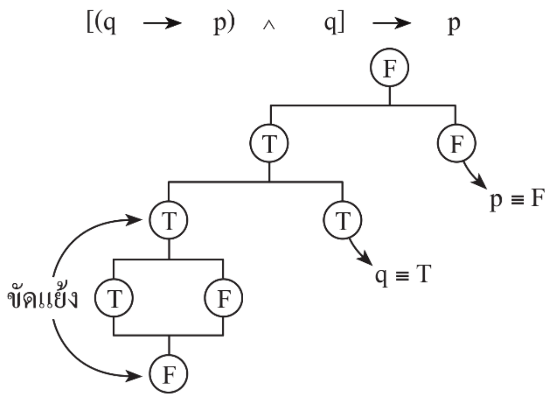
<u>วิธีทำ</u>

พิจารณา คำตอบที่ 1

$$
\begin{array}{ll}
(\sim p \vee q) \wedge (q \vee r) & \leftrightarrow \quad (r \to p) \to q \\
\equiv (q \vee \sim p) \wedge (q \vee r) & \equiv (\sim r \vee p) \to q \\
\equiv q \vee (\sim p \wedge r) & \equiv \sim(\sim r \vee p) \vee q \\
 & \equiv (r \wedge \sim p) \vee q \\
 & \equiv q \vee (r \wedge \sim p) \\
 & \equiv q \vee (\sim p \wedge r)
\end{array}
$$

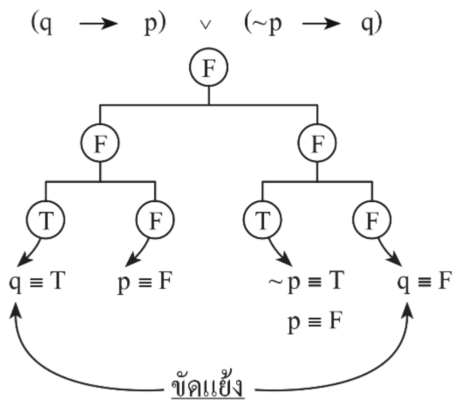
เมื่อ 2 ข้างเหมือนกัน (สมมูลกัน) คำตอบนี้เป็นสัจนิรันดร์

พิจารณา คำตอบที่ 2



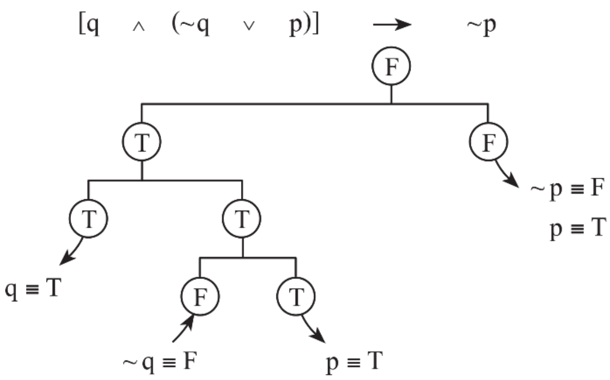
สมมุติเป็นเท็จ แล้วขัดแย้งแสดงว่าเป็นสัจนิรันดร์

พิจารณา คำตอบที่ 3



สมมุติเป็นเท็จ แล้วขัดแย้ง แสดงว่าเป็นสัจนิรันดร์

พิจารณา คำตอบที่ 4



สมมุติเป็นเท็จ แต่ไม่ขัดแย้ง แสดงว่าเป็นเท็จได้ในกรณี $p \equiv T$, $q \equiv T$

ดังนั้น คำตอบนี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

พิจารณา คำตอบที่ 5

เราพบว่า $(q \vee \sim p) \equiv (\sim p \vee q) \equiv p \to q$

ดังนั้น $(q \vee \sim p) \leftrightarrow (p \to q)$

$\equiv (p \to q) \leftrightarrow (p \to q)$

$\equiv T$

$\therefore (\sim p \wedge q) \vee \underbrace{[(q \vee \sim p) \leftrightarrow (p \to q)]}_{T} \equiv T$

คำตอบนี้เป็นสัจนิรันดร์

4. <u>ตอบ</u> 2

<u>วิธีทำ</u>

$0 < a < \frac{\pi}{4}$ ทำให้ $0 < \sin a < \cos a < 1$

$0 < b < 1$ ทำให้ $\log_b \sin a > \log_b \cos a > 0$ (ฟังก์ชันลด)

$0 < \sin a < 1$ ทำให้ $(\sin a)^{\log_b \sin a} < (\sin a)^{\log_b \cos a}$ (ฟังก์ชันลด)

ดังนั้น $x < z$ ——(1)

$0 < \sin a < \cos a$ ทำให้ $(\sin a)^{\log_b \cos a} < (\cos a)^{\log_b \cos a}$

ดังนั้น $z < y$ ——(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $x < z < y$

5. <u>ตอบ</u> 5

<u>วิธีทำ</u>

วิธีที่ 1

จากโจทย์ $9a^2 + 9b^2 = 19c^2 \rightarrow a^2 + b^2 = \frac{19}{9}c^2$

จากกฎของ Cosine , $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\frac{19}{9}c^2 - c^2}{2ab} = \frac{5}{9}\frac{c^2}{ab}$

จากกฎของ Sine , $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$

จาก $\cos C = \frac{5}{9}\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b} = \frac{5}{9}\frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}$

$$\frac{\cos C}{\sin C} = \frac{5}{9}\frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{5}{9}\frac{\sin[180^\circ - (A+B)]}{\sin A \sin B}$$

$$\cot C = \frac{5}{9}\frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{5}{9}\left(\frac{\sin A\cos B + \cos A \sin B}{\sin A \sin B}\right)$$

$$\cot C = \frac{5}{9}(\cot B + \cot A)$$

$$\frac{\cot A + \cot B}{\cot C} = \frac{9}{5}$$

$$\therefore\ 15\left(\frac{\cot A + \cot B}{\cot C}\right) = 15\left(\frac{9}{5}\right) = 27$$

วิธีที่ 2

จากโจทย์ $a^2+b^2 = \frac{19}{9}c^2$

จากกฎของ Sine , $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = K \rightarrow \sin A = aK , \sin B = bK , \sin C = cK$

จากกฎของ Cosine , $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \rightarrow \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

จากโจทย์ $\frac{\cot A+\cot B}{\cot C} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}}{\frac{\cos C}{\sin C}} = \frac{\frac{\cos A}{aK}+\frac{\cos B}{bK}}{\frac{\cos C}{cK}}$

$$= \frac{(b\cos A+a\cos B)c}{ab\cos C} = \frac{c^2}{ab\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$$

$$= \frac{c^2}{\frac{\frac{19}{9}c^2-c^2}{2}} = \frac{2}{\frac{19}{9}-1} = \frac{9}{5}$$

$\therefore\ 15\left(\frac{\cot A+\cot B}{\cot C}\right) = 15\left(\frac{9}{5}\right) = 27$

วิธีที่ 3 (ถ้าจำรูปแบบได้จะเร็วมั่กๆ)

ในสามเหลี่ยม ABC

ถ้า $a^2+b^2 = mc^2$ แล้ว $\frac{\cot C}{\cot A+\cot B} = \frac{m-1}{2}$

$b^2+c^2 = ma^2$ แล้ว $\frac{\cot A}{\cot B+\cot C} = \frac{m-1}{2}$

$c^2+a^2 = mb^2$ แล้ว $\frac{\cot B}{\cot C+\cot A} = \frac{m-1}{2}$

จากโจทย์ $a^2+b^2 = \frac{19}{9}c^2 \left(m = \frac{19}{9}\right) \rightarrow \frac{\cot C}{\cot A+\cot B} = \frac{\frac{19}{9}-1}{2} = \frac{5}{9}$

$\therefore\ 15\left(\frac{\cot A+\cot B}{\cot C}\right) = 15\left(\frac{9}{5}\right) = 27$

6. <u>ตอบ</u> 2

<u>วิธีทำ</u> $(\bar{u}+\bar{v}-\bar{w})\cdot[(\bar{u}-\bar{v})\times(\bar{v}-\bar{w})]$

$= (\bar{u}+\bar{v}-\bar{w})\cdot[\bar{u}\times\bar{v}-\bar{u}\times\bar{w}-\bar{v}\times\bar{v}+\bar{v}\times\bar{w}]$ *

$= (\bar{u}+\bar{v}-\bar{w})\cdot[\bar{u}\times\bar{v}-\bar{u}\times\bar{w}+\bar{v}\times\bar{w}]$

$= \bar{u}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})-\bar{u}\cdot(\bar{u}\times\bar{w})+\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})+\bar{v}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})-\bar{v}\cdot(\bar{u}\times\bar{w})$

$\quad +\bar{v}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})-\bar{w}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})+\bar{w}\cdot(\bar{u}\times\bar{w})-\bar{w}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})$ **

$= \bar{u}\cdot\bar{v}\times\bar{w}-\bar{v}\cdot\bar{u}\times\bar{w}-\bar{w}\cdot\bar{u}\times\bar{v}$

$= \bar{u}\cdot\bar{v}\times\bar{w}+\bar{w}\cdot\bar{u}\times\bar{v}-\bar{w}\cdot\bar{u}\times\bar{v} = \bar{u}\cdot\bar{v}\times\bar{w}$ ***

* $\bar{v}\times\bar{v} = \bar{0}$ $\quad\therefore\quad \bar{u}\times\bar{v}-\bar{u}\times\bar{w}-\bar{0}+\bar{v}\times\bar{w} = \bar{u}\times\bar{v}-\bar{u}\times\bar{w}+\bar{v}\times\bar{w}$

** $\bar{u}\cdot(\bar{u}\times\bar{v}) = 0$ เพราะ $\bar{u}\perp\bar{u}\times\bar{v}$

$\bar{u}\cdot(\bar{u}\times\bar{w}) = 0$ เพราะ $\bar{u}\perp\bar{u}\times\bar{w}$

$\bar{v}\cdot(\bar{u}\times\bar{v}) = 0$ เพราะ $\bar{v}\perp\bar{u}\times\bar{v}$

$\bar{v}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = 0$ เพราะ $\bar{v}\perp\bar{v}\times\bar{w}$

$\bar{w}\cdot(\bar{u}\times\bar{w}) = 0$ เพราะ $\bar{w}\perp\bar{u}\times\bar{w}$

$\bar{w}\cdot(\bar{v}\times\bar{w}) = 0$ เพราะ $\bar{w}\perp\bar{v}\times\bar{w}$

*** $\bar{v}\cdot\bar{u}\times\bar{w} = \bar{w}\cdot\bar{v}\times\bar{u} = \bar{w}\cdot(-(\bar{u}\times\bar{v})) = -\bar{w}\cdot(\bar{u}\times\bar{v}) = -\bar{w}\cdot\bar{u}\times\bar{v}$

$\therefore\quad -\bar{v}\cdot\bar{u}\times\bar{w} = \bar{w}\cdot\bar{u}\times\bar{v}$

7. <u>ตอบ</u> 2

<u>วิธีทำ</u>

I) $A = \arcsin\frac{4}{5} + 2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{4}{3} + \arctan\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$= \arctan\frac{4}{3} + \arctan\frac{3}{4} = \arctan\frac{4}{3} + \operatorname{arccot}\frac{4}{3} = 90^\circ$

$B = \arctan\frac{1}{7} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{3}{4}$

$= \arctan\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = \arctan 1 = 45^\circ$

$\therefore \tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan^2\left(\frac{90^\circ+45^\circ}{2}\right) = \tan^2 67.5^\circ = \cot^2 22.5^\circ = \frac{\cos^2 22.5^\circ}{\sin^2 22.5^\circ}$

$= \frac{2\cos^2 22.5^\circ}{2\sin^2 22.5^\circ} = \frac{1+\cos 45^\circ}{1-\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)}\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}$

$= (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$

II) $A = \arcsin\frac{4}{5} + 2\arctan\frac{1}{3} = 53^\circ + 2(18.5^\circ) = 90^\circ$

$B = \arctan\frac{1}{7} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = 8^\circ + 2(18.5^\circ) = 45^\circ$

$\therefore \tan^2\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan^2 67.5^\circ = \cot^2 22.5^\circ = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$

* ต้องจำอุลตร้าแมน และอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 22.5° ให้ได้ *

8. **<u>ตอบ</u>** 1

<u>วิธีทำ</u> เมื่อโจทย์ กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ เป็นจำนวนนับและมีฐานนิยม (เพียงตัวเดียว)

เราจะได้ว่า $\text{Mode}_x > 0$

ให้ข้อมูลชุดที่ 2 คือ $y_1, y_2, \ldots, y_{20}$ เราจะได้

$$y_i = -3(x_i + 2)$$

ซึ่งก็คือ $y_i = -3x_i - 6$

แสดงว่าข้อมูลชุดที่ 2 เป็นจำนวนลบทุกจำนวน

(เพราะ $x_i > 0 \to -3x_i < 0 \to -3x_i - 6 < -6$)

ดังนั้น $\text{Mode}_y < 0$ (โดย $\text{Mode}_y = -3\text{Mode}_x - 6$)

$\therefore$ $\text{Mode}_x > \text{Mode}_y$ เพราะจำนวนบวกย่อมมากกว่าจำนวนลบ ดังนั้น (ก) ถูก

จาก $y_i = -3x_i - 6$ จะได้ว่า

$$\text{M.D}_y = |-3| \cdot \text{M.D}_x$$

$$\text{M.D}_y = 3\text{M.D}_x$$

จากโจทย์ ถ้า x มีฐานนิยม y ก็จะมีฐานนิยม และเมื่อทั้ง x และ y มีฐานนิยม

แสดงว่า กรณีที่ข้อมูล x ทุกตัวเท่ากันหมด และข้อมูล y ทุกตัวเท่ากันหมด ไม่เกิดแน่นอน

(เพราะกรณีที่ข้อมูลเท่ากันทุกตัวจะไม่มีฐานนิยม)

ดังนั้น $\text{M.D}_x \neq 0$ และ $\text{M.D}_y \neq 0$

และได้ว่า $\text{M.D}_x , \text{M.D}_y > 0$ (การกระจายไม่เป็นลบ)

จะได้ $\text{M.D}_x < 3\text{M.D}_x$

$\therefore$ $\text{M.D}_x < \text{M.D}_y$ (ข) ถูก

พิจารณา (ค)

จากโจทย์จะได้ว่า $\text{S.D}_x \neq 0$ และ $\text{S.D}_y \neq 0$

เหตุผลเดียวกับ $\text{M.D}_x \neq 0$ และ $\text{M.D}_y \neq 0$ ที่พิจารณาไปแล้วในข้างต้น

ดังนั้น $\text{S.D}_x , \text{S.D}_y > 0$ (การกระจายไม่เป็นลบ)

จาก x ทุกตัวเป็นจำนวนนับ ดังนั้น $\mu_x > 0$

และจาก $y_i = -3x_i - 6$ ดังนั้น y ทุกตัวเป็นจำนวนลบ

เราจะได้ $\mu_y < 0$ (โดย $\mu_y = -3\mu_x - 6$)

ดังนั้น ส.ป.ส. การแปรผันของชุดที่ 1 $= \dfrac{S.D_x}{\mu_x} > 0$ เพราะ $\dfrac{\text{บวก}}{\text{บวก}} > 0$

และ ส.ป.ส. การแปรผันของชุดที่ 2 $= \dfrac{S.D_y}{\mu_y} < 0$ เพราะ $\dfrac{\text{บวก}}{\text{ลบ}} < 0$

$\therefore$ ส.ป.ส. การแปรผันของชุดที่ 1 > ส.ป.ส. การแปรผันของชุดที่ 2

เพราะจำนวนบวก ย่อมมากกว่าจำนวนลบ ดังนั้น (ค) ผิด

9. **<u>ตอบ</u>** 3

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + ... + \frac{12}{2^{12}} \qquad \text{——}(1)$$

$$\frac{1}{2}\frac{a}{b} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + ... + \frac{11}{2^{12}} + \frac{12}{2^{13}} \qquad \text{——}(2)$$

(1) – (2) จะได้

$$\frac{1}{2}\frac{a}{b} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{12}}\right) - \frac{12}{2^{13}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{12}{2^{13}}$$

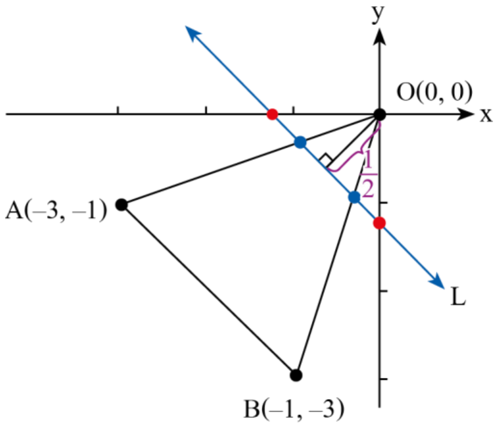
$$\frac{a}{b} = 2 - \frac{1}{2^{11}} - \frac{12}{2^{12}} = \frac{2^{13} - 2 - 12}{2^{12}} = \frac{8192 - 2 - 12}{4096} = \frac{8178}{4096}$$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{4089}{2048}$ จะได้ $a = 4089$, $b = 2048$

$\therefore \quad a + b = 4089 + 2048 = 6,137$

10. **ตอบ** 2

วิธีทำ



เนื่องจาก L // $\overline{AB}$

$m_L = m_{AB}$

$m_L = \frac{2}{-2} = -\frac{1}{1}$

$L : x + y + c = 0$

จากรูป เส้นตรง L จะตัดแกน x และแกน y ในทางลบ

แสดงว่า $c > 0$ *

เนื่องจาก $d(O\,;L) = \frac{1}{2}$

$$\frac{|0+0+c|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\because$ $c > 0$ แสดงว่า $|c| = c$ จะได้ว่า $\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $L : x + y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

แทน $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ใน L : $\frac{1}{\sqrt{2}} + y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$$y = -\sqrt{2}$$

ดังนั้น L ผ่านจุด $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$

แทน $x = -1$ ใน L : $-1 + y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$$y = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น L ผ่านจุด $\left(-1, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore$ จุด $\left(-1, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ ในตัวเลือกที่ 2 ไม่อยู่บนเส้นตรง L

ในทำนองเดียวกัน จุดอื่นๆ ในตัวเลือกที่เหลือ จะอยู่บนเส้นตรง L

* $L : x+y+c = 0$

หาจุดตัดแกน x แทน $y = 0 :\ x+0+c = 0$

$$x = -c$$

จากกราฟ L ต้องตัดแกน x ทางลบ ดังนั้น $c > 0$ เพื่อให้ $x < 0$

11. **ตอบ** 2

วิธีทำ

$$z_1 + \frac{1}{z_2} = \sqrt{2}+i$$

$$\frac{z_1z_2+1}{z_2} = \sqrt{2}+i \quad \text{——}(1)$$

$$\frac{1}{z_1} + z_2 = 1+\sqrt{2}\,i$$

$$\frac{z_1z_2+1}{z_1} = 1+\sqrt{2}\,i \quad \text{——}(2)$$

$(1)\times(2)$:
$$\frac{(z_1z_2+1)^2}{z_1z_2} = (\sqrt{2}+i)(1+\sqrt{2}\,i)$$

$$\frac{(z_1z_2)^2 + 2z_1z_2 + 1}{z_1z_2} = 3i$$

$$z_1z_2 + 2 + \frac{1}{z_1z_2} = 3i \rightarrow z_1z_2 + \frac{1}{z_1z_2} = -2+3i$$

ดังนั้น
$$(z_1z_2)^3 + \frac{1}{(z_1z_2)^3} = (-2+3i)\left((-2+3i)^2 - 3\right)$$

$$= (-2+3i)(-8-12i)$$

$$= 52+0i$$

$$\therefore \quad \mathrm{Re}\left[(z_1z_2)^3 + (z_1z_2)^{-3}\right] = 52$$

12. <u>**ตอบ**</u> 2

<u>**วิธีทำ**</u> $n(S) = \binom{10}{3} = \dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ได้สลากหมายเลขที่น้อยที่สุดเป็น 3

B แทนเหตุการณ์ที่ได้สลากหมายเลขที่มากที่สุดเป็น 7

หา n(A) : เลือกสลากอีก 2 ใบจากเลข $4-10$ ทำได้ $\binom{7}{2} = 21$ วิธี

หา n(B) : เลือกสลากอีก 2 ใบจากเลข $1-6$ ทำได้ $\binom{6}{2} = 15$ วิธี

หา $\mathbf{n(A \cap B)}$: เลือกสลากอีก 1 ใบจากเลข $4-6$ ทำได้ $\binom{3}{1} = 3$ วิธี

$n(E) = n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 21+15-3 = 33$ วิธี

$\therefore\ P(E) = \dfrac{33}{120} = \dfrac{11}{40}$

13. **ตอบ** 5

วิธีทำ ถ้าจะใช้ y ทำนาย x แสดงว่าเราให้ y เป็นตัวแปรต้น และ x เป็นตัวแปรตาม

สมการความสัมพันธ์ คือ $x = my + c$ ——(1)

ดังนั้นจะได้ $\Sigma x = m\Sigma y + N \cdot c$

จากตารางจะได้ว่า $\Sigma x = 0, \Sigma y = 2$ และ $N = 4$

$\therefore\ 0 = m(2) + 4c$

นำ 2 หาร

$0 = m + 2c$ ——(2)

นำ y คูณ 2 ข้างในสมการ (1)

จะได้ $xy = my^2 + cy$

$\Sigma xy = m\Sigma y^2 + c\Sigma y$

จากตารางจะได้ว่า $\Sigma xy = 10$ และ $\Sigma y^2 = 6$

$\therefore\ 10 = m(6) + c(2)$

นำ 2 หาร

$5 = 3m + c$ ——(3)

แก้ (2), (3) ได้ $m = 2, c = -1$

และสมการความสัมพันธ์ คือ $x = 2y - 1$

ดังนั้นเมื่อ $y = 3$ จะได้ $x = 2(3) - 1 = 5$

14. **ตอบ** 2

วิธีทำ $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$

$A^4 = (A^2)^2 = (3I)^2 = 9I$

$A^6 = (A^2)^3 = (3I)^3 = 27I$

$A^8 = (A^4)^2 = (9I)^2 = 81I$

จะได้ $(A^8 + A^6 + A^4 + A^2 + I)B = (81I + 27I + 9I + 3I + I)B$

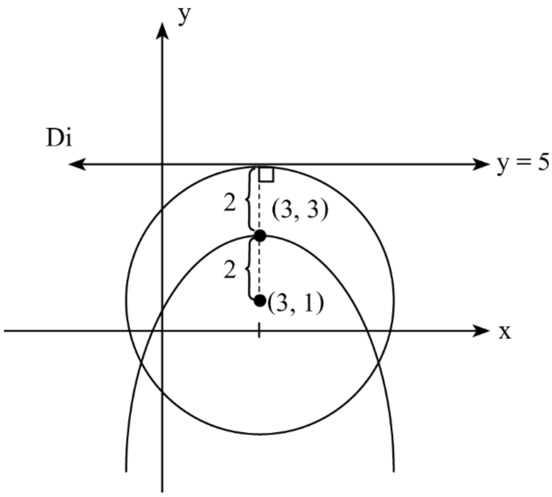
$= (121I)B = 121B = 121\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 121x \\ 121y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121 \\ 1331 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $x = 1, y = 11$

$\therefore$ $x + y = 12$

15. **ตอบ** 1

วิธีทำ



$P : x^2 - 6x + 8y - 15 = 0$

$P : x^2 - 6x + 3^2 = -8y + 15 + 3^2$

$P : (x-3)^2 = -8(y-3)$

เป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอด คือ (3, 3)

$4c = 8 \rightarrow c = 2$

ดังนั้นจุดโฟกัสของ P คือ (3, 1)

และ Di ของ P คือ $y = 5$

จะได้ว่าวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่โฟกัสของ P และสัมผัส Di

คือ วงกลมที่มี ศ.ก. (3, 1) และ $r = 4$

$C : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4^2$

$C : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

พบว่าจุด (7, 1) เป็นจุดบนวงกลม C

16. **ตอบ** 4

วิธีทำ จากโจทย์ $f'(1) = 0$, $f'(2) = 0$ เพราะ f มีจุดวิกฤตที่ $x = 1, 2$

จาก $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x^2}\right) = 3 \to \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = 2$

จาก $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = \dfrac{f(0)}{0} = \dfrac{0}{0}$ แน่ๆ ดังนั้น $\boxed{f(0) = 0}$

ใช้ L'Hospital ต่อจะได้ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x} = \dfrac{f'(0)}{0} = \dfrac{0}{0}$ แน่ๆ ดังนั้น $\boxed{f'(0) = 0}$

ใช้ L'Hospital ต่อจะได้ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2} = \dfrac{f''(0)}{2} = 2$ ดังนั้น $\boxed{f''(0) = 4}$

จาก $f'(0) = f'(1) = f'(2) = 0$ ดังนั้น $f'(x) = k(x)(x-1)(x-2)$

$f'(x) = kx(x^2-3x+2) = kx^3-3kx^2+2kx$

$f''(x) = 3kx^2-6kx+2k \to f''(0) = 2k = 4 \to \therefore\ k = 2$

จะได้ $f'(x) = 2x^3-6x^2+4x$

$f(x) = \int f'(x)dx = \dfrac{2x^4}{4}-\dfrac{6x^3}{3}+\dfrac{4x^2}{2}+c$

$f(0) = 0 \to c = 0 \quad \therefore\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^4-2x^3+2x^2$

$\therefore\ f(2) = \dfrac{16}{2}-16+8 = 0$

17. <u>ตอบ</u> 1

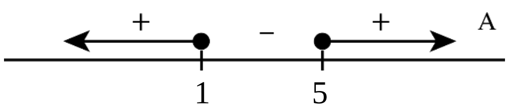
<u>วิธีทำ</u>

พิจารณา A จาก $|\square| \geq |\Delta|$ จะได้

$$(\square-\Delta)(\square+\Delta) \geq 0$$

$$\left[(2x-4)-(x+1)\right]\cdot\left[(2x-4)+(x+1)\right] \geq 0$$

$$(x-5)(3x-3) \geq 0$$



พิจารณา B จาก $|\square| < a$ จะได้

$$-a < \square < a$$

$$|2-3x| < 3$$

จะได้ $|3x-2| < 3$ เพราะ $|2-3x| = |3x-2|$

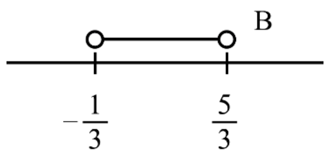
$$-3 < 3x-2 < 3$$

บวก 2 ตลอด

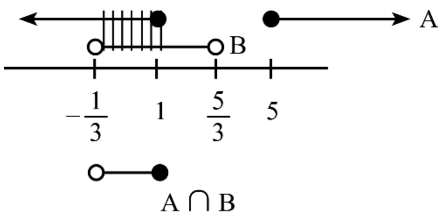
$$-1 < 3x < 5$$

นำ 3 หารตลอด

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$$



และเราจะได้



พิจารณา C $4x < |x+2|$

เขียนใหม่ได้ว่า $|x+2| > 4x$

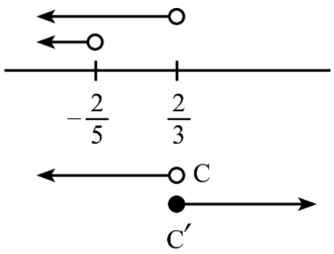
จาก $|\square| > a$ จะได้

$\square > a$ หรือ $\square < -a$

$\therefore$ $x+2 > 4x$ <u>หรือ</u> $x+2 < -4x$

$2 > 3x$ $\cup$ $5x < -2$

$\frac{2}{3} > x$ $x < -\frac{2}{5}$



$$\therefore \quad A \cap B - C' = \left(-\frac{1}{3}, 1\right] - \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

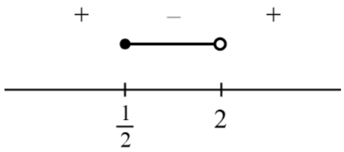
18. **<u>ตอบ</u>** 5

<u>วิธีทำ</u> $\dfrac{(2x-1)(x-1)^6\cancel{(x-2)^8}}{\cancel{(x-2)^3}(x-4)^2} \le 0 , x \ne 2, 4$

$$\dfrac{(2x-1)\cancel{(x-1)^6}(x-2)^5}{\cancel{(x-4)^2}} \le 0 , x \ne 2, 4$$

กำลังคู่ตัดทิ้ง กำลัง 5 คิดเหมือนกำลัง 1 แต่ $(x-1)^6 = 0$ ทำให้อสมการจริง (จะได้ $0 \le 0$) ดังนั้น $x = 1$ ได้

$$(2x-1)(x-2) \le 0 \; , \; x \ne 2, 4 \; , \; x = 1$$

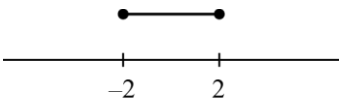


$\therefore \; \mathcal{U} = \left[\dfrac{1}{2}, 2\right)$

พิจารณา P(x)

$$|x| \le 2$$

$$-2 \le x \le 2$$



พิจารณา Q(x)

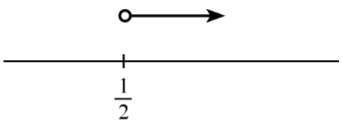
$$(2x-1)\cancel{x^2} > 0$$

กำลังคู่ตัดทิ้ง แต่ $x^2 \ne 0 \rightarrow$ จะทำให้อสมการเท็จ (จะได้ $0 > 0$) ดังนั้น $x \ne 0$

$$2x-1 > 0$$

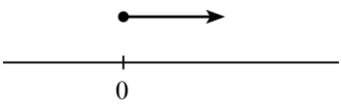
$$2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2}$$



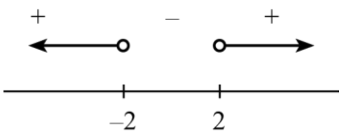
พิจารณา R(x)

$$x \ge 0$$



พิจารณา S(x)

$$x^2 > 4$$
$$x^2 - 4 > 0$$
$$(x-2)(x+2) > 0$$



พิจารณา คำตอบที่ 1 จริง

$\forall x[Q(x)] \equiv F$ เช่น เมื่อ $x = \frac{1}{2} \rightarrow Q\left(\frac{1}{2}\right) \equiv F$

ดังนั้น $\underset{F}{\forall x[Q(x)]} \rightarrow \exists x[P(x) \wedge R(x)] \equiv T$

"ถ้า... แล้ว หน้าเท็จ ตอบจริงเลย"

พิจารณา คำตอบที่ 2 จริง

$\forall x[S(x) \rightarrow R(x)] \equiv T$

เราพบว่า เมื่อ $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$ แล้ว $x \notin (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

ดังนั้น ทุก $x \in \mathcal{U}$ จะได้ $S(x) \equiv F$

"ถ้า... แล้ว หน้าเท็จ ตอบจริงเลย"

พิจารณา คำตอบที่ 3 จริง

$\exists x[R(x) \rightarrow P(x)] \equiv T$

เนื่องจากมีบางค่า $x, x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$ ซึ่ง $x \geq 0$ แล้ว $-2 \leq x \leq 2$

เช่น $x = 1.5$ จะได้ว่า $R(1.5) \equiv T$ และ $P(1.5) \equiv T$

พิจารณา คำตอบที่ 4 จริง

$\exists x[Q(x)] \equiv T$

เช่น $x = 1$ จะได้ $Q(1) \equiv T$

$\sim\forall x[S(x)] \rightarrow \underset{T}{\exists x[Q(x)]} \equiv T$

"ถ้า... แล้ว หลังจริง ตอบจริงเลย"

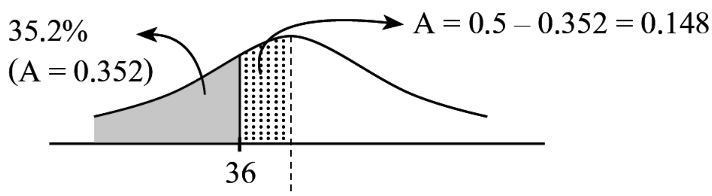
พิจารณา คำตอบที่ 5 เท็จ

$\exists x[P(x) \wedge S(x)] \equiv F$

เนื่องจากไม่มีค่า x ใดที่ $x \in [-2, 2]$ และ $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

19. **<u>ตอบ</u>** 1

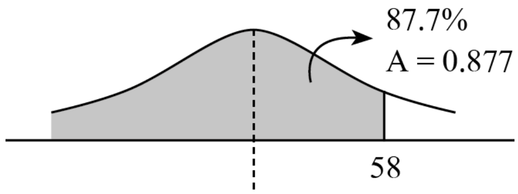
<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $36 = P_{35.2}$

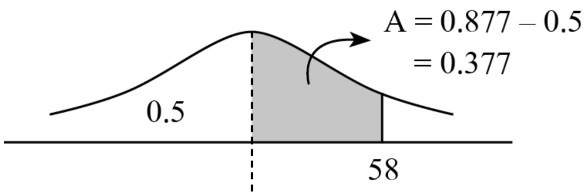


จากตารางได้ว่า $A = 0.148 \rightarrow Z = -0.38$ (Z ด้านซ้าย < 0)

$\therefore X = 36 \rightarrow Z = -0.38$

และจากโจทย์ $58 = P_{87.7}$





จากตารางได้ว่า $A = 0.377 \rightarrow Z = 1.16$

$\therefore X = 58 \rightarrow Z = 1.16$

จาก $\Delta Z = \frac{\Delta X}{\sigma}$

$$1.16-(-0.38) = \frac{58-36}{\sigma}$$

$$1.54 = \frac{22}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{22}{1.54}$$

$$= \frac{2200}{154}$$

$$= \frac{100}{7}$$

เราพบว่า ห.ร.ม. ของ 100 และ 7 เท่ากับ 1

$\therefore a = 100, b = 7$ และได้ $a+b = 107$

20. **<u>ตอบ</u>** 3

<u>วิธีทำ</u>

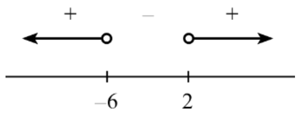
$x^2 - 49 \neq 0$ และ $\log_{0.3}\left(\frac{x-2}{x+6}\right) \geq 0$ และ $\frac{x-2}{x+6} > 0$

$$\cap \qquad\qquad \cap$$

$x^2 \neq 49$

$x \neq -7, 7$

$$\log_{0.3}\left(\frac{x-2}{x+6}\right) \geq \log_{0.3} 1$$



$$\frac{x-2}{x+6} \leq 1$$

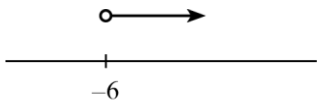
$$\frac{x-2}{x+6} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x-2-(x+6)}{x+6} \leq 0$$

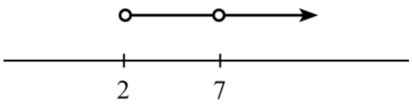
$$\frac{-8}{x+6} \leq 0$$

$$\therefore \quad x+6 > 0$$

$$x > -6$$



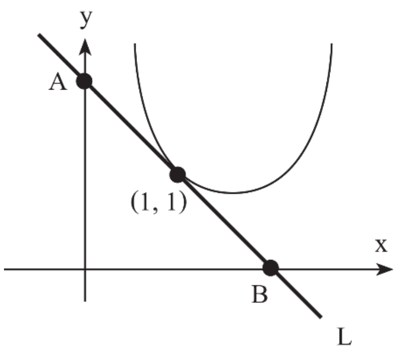
จะได้ว่า



$\therefore \quad D_f = (2, \infty) - \{7\}$

21. **ตอบ** 5

วิธีทำ



$$f'(x) = 2x+b$$

ความชันของ L คือ $f'(1) = 2+b$

สมการ L คือ $\boxed{y-1 = (2+b)(x-1)}$

แทน $x = 0$, $y-1 = (2+b)(-1)$

$$y = -b-1$$

ดังนั้นจุด A คือ $(0, -b-1)$

แทน $y = 0$, $-1 = (2+b)(x-1)$

$$x = \frac{-1}{2+b}+1 = \frac{1+b}{2+b}$$

ดังนั้นจุด B คือ $\left(\frac{1+b}{2+b}, 0\right)$

จะได้ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}\left(\frac{1+b}{2+b}\right)(-b-1)$

$$2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{b+1}{b+2}\right)(b+1)$$

$$-4(b+2) = (b+1)^2$$

$$-4b-8 = b^2+2b+1$$

$$b^2+6b+9 = 0$$

$$(b+3)^2 = 0 \qquad \therefore\ b = -3$$

22. **ตอบ** 1

วิธีทำ

พิจารณา (ก)

$$f\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{1+\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}{1-\left(\frac{e-1}{e+1}\right)}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(e+1)+(e-1)}{e+1}}{\frac{(e+1)-(e-1)}{e+1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{2e}{\cancel{e+1}}}{\frac{2}{\cancel{e+1}}}\right) = \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = \ln e = 1$$

$$\therefore \quad gof\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = g\left(f\left(\frac{e-1}{e+1}\right)\right) = g(1) = \frac{(1)^3+3(1)}{3(1)^2+1} = 1$$

ดังนั้น (ก) ถูก

พิจารณา (ข)

$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^3+3x}{3x^2+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+\left(\frac{x^3+3x}{3x^2+1}\right)}{1-\left(\frac{x^3+3x}{3x^2+1}\right)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{(3x^2+1)+(x^3+3x)}{\cancel{3x^2+1}}}{\frac{(3x^2+1)-(x^3+3x)}{\cancel{3x^2+1}}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x^3+3x^2+3x+1}{1-3x+3x^2-x^3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(x+1)^3}{(1-x)^3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^3$$

$$= 3\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

$$\therefore \quad fog\left(\frac{1-e}{e+1}\right) = 3\ln\left(\frac{\left(\frac{1-e}{e+1}\right)+1}{1-\left(\frac{1-e}{e+1}\right)}\right) = 3\ln\left(\frac{\frac{(1-e)+(e+1)}{\cancel{e+1}}}{\frac{(e+1)-(1-e)}{\cancel{e+1}}}\right)$$

$$= 3\ln\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}e}\right) = 3\ln e^{-1} = 3\cdot(-\ln e)$$

$$= 3\cdot(-1) = -3$$

ดังนั้น (ข) ถูก

พิจารณา (ค)

$$gof^{-1}(0) = g(f^{-1}(0)) = g(0) = \frac{(0)^3+3(0)}{3(0)^2+1}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

ดังนั้น (ค) ผิด

*** หา $\mathbf{f^{-1}(0)}$ (เทคนิค แทน $\mathbf{f(x)}$ ด้วย 0)**

$$0 = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{1+x}{1-x} = 1$$

$$1+x = 1-x$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$\therefore \quad f^{-1}(0) = 0$$

23. **ตอบ** 1

วิธีทำ $(2x)^{\ln 2} = (3y)^{\ln 3} \rightarrow \ln(2x)^{\ln 2} = \ln(3y)^{\ln 3}$

$$(\ln 2)(\ln 2+\ln x) = \ln 3(\ln 3+\ln y) \quad \text{——} (1)$$

$$3^{\ln x} = 2^{\ln y} \rightarrow \ln(3^{\ln x}) = \ln(2^{\ln y})$$

$$(\ln x)(\ln 3) = (\ln y)(\ln 2) \quad \text{——} (2)$$

$(1)\times\ln 2$, $(\ln 2)^2(\ln 2+\ln x) = (\ln 2)(\ln 3)(\ln 3+\ln y) \quad \text{——}(3)$

$(2)\times\ln 3$, $(\ln 3)^2(\ln x) = (\ln 3)(\ln 2)(\ln y) \quad \text{——}(4)$

$(3)-(4)$, $(\ln 2)^3 + (\ln 2)^2\ln x - (\ln 3)^2\ln x = (\ln 3)^2(\ln 2)$

$$\ln x\left((\ln 2)^2-(\ln 3)^2\right) + (\ln 2)\left((\ln 2)^2-(\ln 3)^2\right) = 0$$

$$\left[(\ln 2)^2-(\ln 3)^2\right]\left[\ln x+\ln 2\right] = 0$$

$$\ln x = -\ln 2 \rightarrow \therefore\ x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

แทน $x = \frac{1}{2}$ ใน (1) , $(\ln 2)(\ln 2-\ln 2) = \ln 3(\ln 3+\ln y)$

$$0 = \ln 3(\ln 3+\ln y)$$

$$\ln y = -\ln 3 \rightarrow \therefore\ y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad \therefore\ 4a+3b = 4\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right) = 3$

24. <u>ตอบ</u> 2

<u>วิธีทำ</u>

$$g(x) = fof(x)$$
$$= f(f(x))$$
$$= f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$$
$$= \frac{1}{\frac{(1-x)-1}{1-x}}$$
$$= \frac{1}{\frac{-x}{1-x}}$$
$$= \frac{1-x}{-x}$$
$$= \frac{1-x}{-x}\cdot\frac{(-1)}{(-1)} = \frac{x-1}{x}$$

$$h(x) = f(f(f(x)))$$
$$= f(g(x))$$
$$= f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)}$$
$$= \frac{1}{\frac{x-(x-1)}{x}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{x}}$$
$$= x$$

$$\therefore\ (g\cdot h)(x) = g(x)\cdot h(x) = \frac{x-1}{x}\cdot x = x-1$$

25. <u>ตอบ</u> 3

<u>วิธีทำ</u>

พิจารณา (ก)

หา D_f

จาก $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$ เนื่องจาก $x^2+4 \neq 0$ แน่นอน

$\therefore$ พบว่า $D_f = R$

หา D_g

จาก $y = 2+\sqrt{x}$

จะได้ $x \geq 0$

$\therefore$ $D_g = [0,\infty)$

ดังนั้น $D_{f+g} = D_f \cap D_g = R \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

จึงได้ว่า (ก) ผิด

พิจารณา (ข)

$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\}$, โดย $D_g \cap D_f = D_f \cap D_g = [0 , \infty)$

$= [0,\infty)-\{0\}^* = (0,\infty)$

* $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{4x}{x^2+4} = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$

ดังนั้น (ข) ถูก

พิจารณา (ค)

หา R_f

จาก $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$

$yx^2 + 4y = 4x$

$yx^2 - 4x + 4y = 0$ ——(1)

กรณี 1 $y = 0$ ได้ว่า

$0 = \dfrac{4x}{x^2+4}$

$0 = 4x$

$\therefore$ $x = 0$

$0 \in R_f$ (แทน $y = 0$ หาค่า x ได้)

กรณี 2 $y \neq 0$ ได้ว่า

รูปแบบ $ax^2 + bx + c = 0$

เมื่อ $a \neq 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ดังนั้น จาก (1) , $a = y$, $b = -4$, $c = 4y$

$$\therefore \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(y)(4y)}}{2(y)}$$

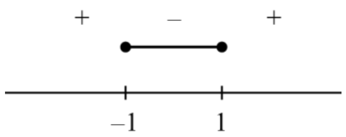
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16y^2}}{2y}$$

$16 - 16y^2 \geq 0$

$\div 16 , \quad 1 - y^2 \geq 0$

คูณ -1 , $y^2 - 1 \leq 0$

$(y-1)(y+1) \leq 0$



แต่กรณีนี้ $y \neq 0$

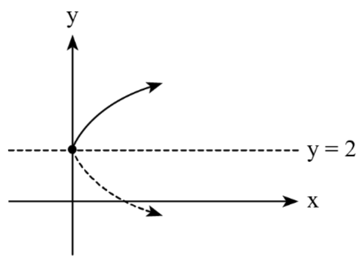
$\therefore \quad y \in [-1,1] - \{0\}$

เมื่อนำ 2 กรณีมารวมกัน ได้ว่า

$R_f = [-1,1]$

หา R_g

$$\begin{aligned} y &= 2 + \sqrt{x} \\ y - 2 &= \sqrt{x} \ , \quad y - 2 \geq 0 \to y \geq 2 \\ (y-2)^2 &= (\sqrt{x})^2 \ , \quad y \geq 2 \\ x &= (y-2)^2 \ , \quad y \geq 2 \end{aligned}$$



$\therefore \quad R_g = [2, \infty)$

ดังนั้น $R_f \cap R_g = [-1,1] \cap [2, \infty) = \{ \}$

จะได้ว่า (ค) ถูก

26. **<u>ตอบ</u>** 3

<u>วิธีทำ</u> เมื่อ $n \le x < n+1$ โดย $n \in I$ เราจะได้ว่า

$[x] = n$, $n+1 \le x+1 < n+2$ และจะได้ $[x+1] = n+1$

ดังนั้น $[x+1] = [x]+1$ จริง (ก) ถูก

สำหรับ (ข) , (ค) นั้นผิด เช่น $x = y = 2.5$

$[x+y] = [2.5+2.5] = [5] = 5$

$[x]+[y] = [2.5]+[2.5] = 2+2 = 4$

$\therefore$ $[x+y] \ne [x]+[y]$

และ $[xy] = [(2.5)(2.5)] = [6.25] = 6$

$[x]\cdot[y] = [2.5]\cdot[2.5] = 2\cdot 2 = 4$

$\therefore$ $[xy] \ne [x]\cdot[y]$

27. **<u>ตอบ</u>** 3

<u>วิธีทำ</u> **ไฮเพอร์โบลา :** $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 41 = 0$

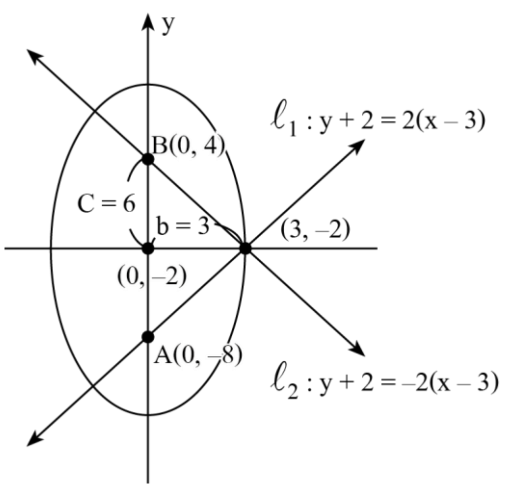
$$4(x^2 - 6x + 3^2) - (y^2 + 4y + 2^2) = -41+4(3)^2 - 2^2$$

$$4(x-3)^2 - (y+2)^2 = -9 \qquad \text{หารตลอดด้วย } (-9)$$

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{4(x-3)^2}{9} = 1$$

สมการเส้นกำกับ : $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{4(x-3)^2}{9} = 0 \rightarrow (y+2)^2 = 4(x-3)^2$

จะได้ $\ell_1 : y+2 = 2(x-3)$ และ $\ell_2 : y+2 = -2(x-3)$



ℓ_1 ตัดแกน y แทน $x = 0 : y+2 = 2(0-3)$

$\therefore$ A(0, −8)

ℓ_2 ตัดแกน y แทน $x = 0 : y+2 = -2(0-3)$

$\therefore$ B(0, 4)

วงรี มี A และ B เป็นจุดโฟกัส $\rightarrow$ เป็นวงรีไข่ตั้ง

ดังนั้นศูนย์กลางคือ (0, −2)

พบว่า $c = 6 \rightarrow c^2 = 36$,

$b = 3 \rightarrow b^2 = 9$

และ $a^2 = b^2 + c^2 = 9+36 = 45$

เพราะฉะนั้น E : $\frac{(x-0)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{45} = 1$ (นำ 45 คูณตลอด)

$E: 5x^2+y^2+4y+4 = 45$

$\therefore$ $E: 5x^2+y^2+4y-41 = 0$

28. **<u>ตอบ</u>** 4

<u>วิธีทำ</u>

$\frac{z}{a}+\frac{a}{z}$ มีส่วนจินตภาพเท่ากับศูนย์ แสดงว่า $\frac{z}{a}+\frac{a}{z}$ เป็นจำนวนจริง

$\overline{\left(\frac{z}{a}+\frac{a}{z}\right)} = \frac{z}{a}+\frac{a}{z} \to \frac{\overline{z}}{a}+\frac{a}{\overline{z}} = \frac{z}{a}+\frac{a}{z} \to \frac{z-\overline{z}}{a}+\frac{a\overline{z}-az}{z\overline{z}} = 0$

$\frac{z-\overline{z}}{a}-\frac{a(z-\overline{z})}{|z|^2} = 0 \to (z-\overline{z})\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{|z|^2}\right) = 0$ ซึ่งแยกได้ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $z-\overline{z} = 0 \to z = \overline{z}$

กรณีที่ 2 $\frac{1}{a}-\frac{a}{|z|^2} = 0 \to \frac{1}{a} = \frac{a}{|z|^2} \to a^2 = |z|^2$ ——(1)

หา $|z|^2$ จาก

$|2z+15|^2 = (\sqrt{3})^2|z+10|^2 \to 4|z|^2+225+30\overline{z}+30z = 3(|z|^2+100+10\overline{z}+10z)$

$|z|^2 = 75$

นำ $|z|^2 = 75$ ไปแทนใน (1) จะได้ $a^2 = 75 \to a = 5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}$

$\therefore$ ผลต่างของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $a = 5\sqrt{3}-(-5\sqrt{3}) = 10\sqrt{3}a$

29. **ตอบ** 3

วิธีทำ ให้มีห้องพักสำหรับ 1 คน x ห้อง

และมีห้องพักสำหรับ 2 คน y ห้อง

จากเงื่อนไขที่ 1 จะได้ว่า $x+2y \geq 48$

จากเงื่อนไขที่ 2 จะได้ว่า $20x+30y \leq 900$

ก็คือ $2x+3y \leq 90$

จากเงื่อนไขที่ 3 จะได้ว่า $y \leq x$

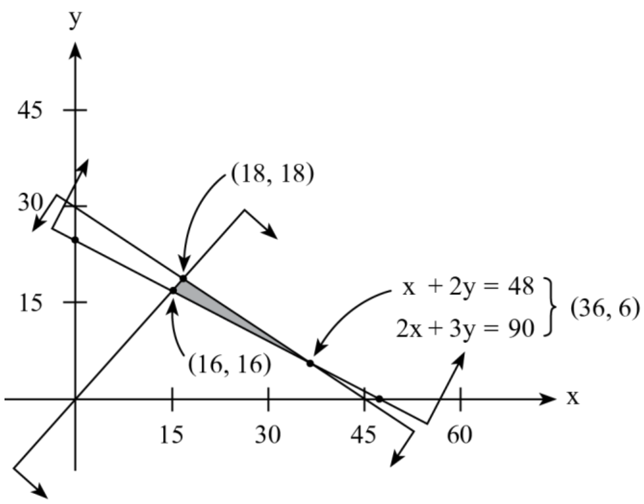
ให้ราคาห้องพักสำหรับ 1 คน 3k บาท/ห้อง

จะได้ว่า ราคาห้องพักสำหรับ 2 คน 4k บาท/ห้อง

และเมื่อให้ $P(x, y)$ แทนรายได้รวม

จะได้ว่า $P(x, y) = 3kx+4ky$ เราพบว่า $x, y \in I^+ \cup \{0\}$ ด้วย

เพราะจำนวนห้องจะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์



$P(16, 16) = 3k(16)+4k(16) = 112k$

$P(18, 18) = 3k(18)+4k(18) = 126k$

$P(36, 6) = 3k(36)+4k(6) = 132k$ (MAX)

ดังนั้น $x-y = 36-6 = 30$

30. **<u>ตอบ</u>** 2

<u>วิธีทำ</u> ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = 3$ แสดงว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 3$ ด้วย

ดังนั้น $$f(3) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$k\sqrt{4} = m(3)+2 \rightarrow 2k-3m = 2 \quad \text{——(1)}$$

ขณะ $x \rightarrow 3^-$, $f(x) = k\sqrt{x+1} \rightarrow f'(x) = \dfrac{k}{2\sqrt{x+1}}$

ขณะ $x \rightarrow 3^+$, $f(x) = mx+2 \rightarrow f'(x) = m$

จากโจทย์ $$f'(3^-) = f'(3^+)$$

$$\frac{k}{2\sqrt{4}} = m \rightarrow k = 4m \quad \text{——(2)}$$

แทน (2) ใน (1) , $2(4m)-3m = 2 \rightarrow m = \dfrac{2}{5}$

แทน $m = \dfrac{2}{5}$ ใน (2) , $k = 4\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{8}{5}$

$\therefore\ k+m = \dfrac{8}{5}+\dfrac{2}{5} = 2$

31. **ตอบ** 3

วิธีทำ $x = \log_{2a}\left(\frac{bcd}{2}\right) \rightarrow x+1 = \log_{2a}\left(\frac{bcd}{2}\right)+\log_{2a}(2a)$

$x+1 = \log_{2a}(abcd) \rightarrow \frac{1}{x+1} = \log_{abcd}(2a)$

จาก $y = \log_{3b}\left(\frac{acd}{3}\right) \rightarrow y+1 = \log_{3b}\left(\frac{acd}{3}\right)+\log_{3b}(3b)$

$y+1 = \log_{3b}(abcd) \rightarrow \frac{1}{y+1} = \log_{abcd}(3b)$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ $\frac{1}{z+1} = \log_{abcd}(4c)$ และ $\frac{1}{w+1} = \log_{abcd}(5d)$

ดังนั้น $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{w+1} = \log_{abcd}[(2a)(3b)(4c)(5d)]$

$= \log_{abcd}(120abcd)$

$= \log_{abcd}(120)+\log_{abcd}(abcd)$

$= \log_{abcd}(120)+1$

$\therefore\ M = 120$

32. **ตอบ** 5

วิธีทำ ฟังก์ชันทั่วถึง แสดงว่า B ต้องถูกใช้ทั้งหมด

A	B
1	a
2	b
3	c
4	d
5	

มองเหมือนกับแบ่งกลุ่มของที่ต่างกัน 5 ชิ้นในเซต A เป็น 4 กลุ่ม

แล้วนำไปแจกให้คน 4 คน คือ a, b, c, d ในเซต B

ขั้นที่ 1 แบ่งกลุ่มเป็น 2, 1, 1, 1 ทำได้ $\frac{5!}{2!1!1!1!3!} = \frac{5!}{2!3!}$ วิธี

ขั้นที่ 2 แจกให้คน 4 คน ทำได้ 4! วิธี

$\therefore$ สร้างฟังก์ชันได้ $= \frac{5!}{2!3!} \times 4! = 240$ วิธี

33. **ตอบ** 1

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 2} \frac{2^x x - 2^x \cdot 2^1}{\sqrt[3]{x+6}-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2^x(x-2)}{\sqrt[3]{x+6}-2} = \lim_{x\to 2} 2^x \cdot \boxed{\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x+6)^{\frac{1}{3}}-2}}$$

แทนค่าแล้วได้ $\frac{0}{0}$
ใช้ L'Hospital ต่อ

$$= (2^2) \cdot \lim_{x\to 2} \frac{1}{\frac{1}{3}(x+6)^{-\frac{2}{3}} - 0}$$

$$= (4)\left(\frac{1}{\frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}}\right) = (4)\left(\frac{1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}\right) = 48$$

34. **ตอบ** 2

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ Med $= Q_2 = 7$

เมื่อ Med $= 7$ แสดงว่า เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก ข้อมูล 3 ตัวแรก จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ 7 และข้อมูล 3 ตัวถัดไปจะมากกว่าหรือเท่ากับ 7

เรียงจากน้อย → มาก

$$\underbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}_{\leq 7} \overset{7}{\downarrow} \underbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}_{\geq 7}$$

ดังนั้น x_1, x_2, x_4 คือ ข้อมูล 3 ตัวแรก เพราะทั้ง 3 ตัวมีค่าน้อยกว่า 7

$$\underline{\ 2\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 6\ }\ \overset{7}{\downarrow}\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_$$

สมมุติให้ อีก 3 ตัวถัดไปเป็น a, b, c โดย $a \leq b \leq c$

ดังนั้น

$$\underline{\ 2\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 6\ }\ \overset{7}{\downarrow}\ \underline{\ a\ }\ \underline{\ b\ }\ \underline{\ c\ }$$

จะได้ว่า $\dfrac{6+a}{2} = 7 \rightarrow 6+a = 14 \rightarrow a = 8$

จาก พิสัย $= 16$

$\therefore\ c-2 = 16$

$c = 18$

และจาก $\sum_{i=1}^{6}(x_i-k)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $k = 8$

เราจะได้ว่า $\mu = 8$ (เพราะ $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$ น้อยที่สุด)

จาก $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

จะได้ว่า $8 = \dfrac{2+3+6+8+b+18}{6}$

$48 = 37+b$

$\therefore\ b = 11$

ข้อมูล 6 ตัว คือ $\underline{\ 2\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 6\ }\ \underline{\ 8\ }\ \underline{\ 11\ }\ \underline{\ 18\ }$

จาก $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\mu)^2}{N}$

$= \frac{(2-8)^2 + (3-8)^2 + (6-8)^2 + (8-8)^2 + (11-8)^2 + (18-8)^2}{6}$

$= \frac{36+25+4+0+9+100}{6}$

$= 29$

35. <u>**ตอบ**</u> 4

<u>**วิธีทำ**</u>

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
21 – 30	A	A
31 – 40	10	$A+10$
41 – 50	50	$A+60$
51 – 60	40	
61 – 70	B	

$N = \Sigma f = 200$

เมื่อ $P_{75} = 50.5 =$ ขอบบนชั้น $41-50$

$\therefore$ ตำแหน่งของ $P_{75} =$ ความถี่สะสมชั้น $41-50$

$\frac{75}{100} \cdot 200 = A+60$

$150 = A+60$

$A = 90$

จาก $A+10+50+40+B = 200$

เมื่อ $A = 90$ $\therefore$ $90+10+50+40+B = 200$ จะได้ $B = 10$

หา Med

ตำแหน่งของ $\text{Med} = \frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$

เราพบว่า ตำแหน่งของ Med = ความถี่สะสมชั้น $31-40$

$(A+10 = 90+10 = 100)$

ดังนั้น $\text{Med} =$ ขอบบนชั้น $31-40$

$= 40.5$

หา μ จากตารางพบว่าทุกชั้น I เท่ากันหมด โดย $I = 10$

คะแนน	ความถี่ (f)	d	$f \cdot d$
21 – 30	90	–2	–180
31 – 40	10	–1	–10
41 – 50	50	0	0
51 – 60	40	1	40
61 – 70	10	2	20

พี่ให้ ชั้น 41 – 50 มี $d = 0$ จะได้ $\Sigma fd = -130$ และ $a = 45.5$

จาก $\mu = a + I\left(\frac{\Sigma fd}{N}\right) = 45.5 + 10\left(\frac{-130}{200}\right) = 39$

ดังนั้น $\mu + Med = 39 + 40.5 = 79.5$

<u>ตอนที่ 2</u> : แบบอัตนัย เติมคำตอบที่ถูกต้อง

จำนวน 10 ข้อ (ข้อ 36 - 45) ข้อละ 9 คะแนน

36. **<u>ตอบ</u>** 0045.00

<u>วิธีทำ</u>

$$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9} = 1$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}\cdot 2+2^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}\cdot 3+3^2} = 1$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2} = 1$$

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right| = 1 \text{ ——(1)}$$

จาก $|a|+|b| = |a-b|$ เมื่อ $a\cdot b \le 0$

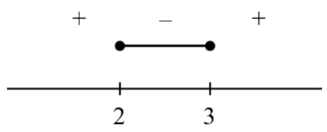
จะเห็นว่า $1 = |1| = \left|\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\left(\sqrt{x-1}-3\right)\right|$

จาก (1) , $\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right| = \left|\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\left(\sqrt{x-1}-3\right)\right|$

ดังนั้น $\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}-3\right) \le 0$

ให้ $A = \sqrt{x-1}$

จะได้ $(A-2)(A-3) \le 0$



$2 \le A \le 3$

$\therefore \quad 2 \le \sqrt{x-1} \le 3$

$4 \le \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \le 9$ โดย $x-1 \ge 0 \rightarrow x \ge 1$

$4 \le x-1 \le 9$

บวก 1 ตลอด

$5 \le x \le 10$

ผลรวมของคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการนี้ $= 5+6+7+8+9+10 = 45$

37. **ตอบ** 0082.00

วิธีทำ

$$\begin{array}{ccccc} & & 4x & 4x^2(2x-1) & 4x \end{array}$$

$$\det A = \begin{array}{|ccc|cc} 2x-1 & 2\sqrt{x} & 2\sqrt{x} & 2x-1 & 2\sqrt{x} \\ 2\sqrt{x} & 1 & -2x & 2\sqrt{x} & 1 \\ -2\sqrt{x} & 2x & -1 & -2\sqrt{x} & 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & (1-2x) & 8x^2 & 8x^2 \end{array}$$

$$\det A = 8x^3+12x^2+6x+1 = (2x+1)^3$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\det B = \begin{array}{|ccc|cc} 0 & 2x-1 & \sqrt{x} & 0 & 2x-1 \\ 1-2x & 0 & 2\sqrt{x} & 1-2x & 0 \\ -\sqrt{x} & -2\sqrt{x} & 0 & -\sqrt{x} & -2\sqrt{x} \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & -2x(2x-1) & -2x(1-2x) \end{array}$$

$$\therefore \ \det(\operatorname{adj}A)+\det(\operatorname{adj}B) = (\det A)^2+(\det B)^2 = \left((2x+1)^3\right)^2+0 = (2x+1)^6$$

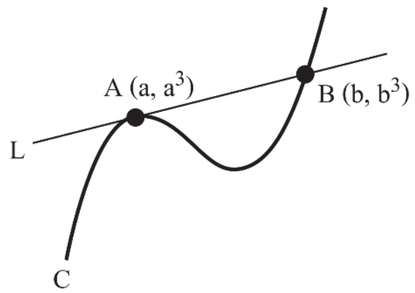
จากโจทย์ จะได้ว่า $(2x+1)^6 = 10^6 \rightarrow 2x+1 = 10 , \cancel{-10}$ ใช้ไม่ได้เพราะ $x \in R^+$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \quad 4x^2+1 = 4\left(\frac{9}{2}\right)^2+1 = 81+1 = 82$$

38. <u>**ตอบ**</u> 0017.00

<u>**วิธีทำ**</u>



จากรูป $m_L = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{b^3 - a^3}{b-a}$

และ $m_L = y'(a) = 3a^2$

จะได้ $\dfrac{b^3 - a^3}{b-a} = 3a^2$

$$\frac{\cancel{(b-a)}(b^2+ab+a^2)}{\cancel{b-a}} = 3a^2$$

$$b^2+ab-2a^2 = 0$$

$$(b-a)(b+2a) = 0$$

ใช้ไม่ได้

$$\therefore \quad b = a\ ,\ -2a$$

จะได้ว่า ความชันเส้นโค้ง C ที่จุด A คือ $y'(a) = 3a^2$

ความชันเส้นโค้ง C ที่จุด B คือ $y'(b) = y'(-2a) = 3(-2a)^2 = 12a^2$

จะได้ $K = \dfrac{12a^2}{3a^2} = 4 \qquad \therefore \quad K^2+1 = 4^2+1 = 17$

39. <u>**ตอบ**</u> 0002.50

<u>**วิธีทำ**</u>

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \qquad = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$

$a_3 = a_2 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} = 1 + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2}\right) + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2}\right)$

$a_4 = a_3 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} = 1 + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3}\right)$

$a_n = 1 + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ...\right) + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + ...\right)$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1+1+\frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2} = 2.5$$

40. **<u>ตอบ</u>** 8997.00

<u>วิธีทำ</u>

$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}a_n$

แทน $n = 1$ จะได้ $a_3a_1 - a_2^2 = a_2a_1 \rightarrow \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_2}{a_1} = 1$

แทน $n = 2$ จะได้ $a_4a_2 - a_3^2 = a_3a_2 \rightarrow \frac{a_4}{a_3} - \frac{a_3}{a_2} = 1$

แสดงว่า $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, ..., \frac{a_{n+1}}{a_n}$ เป็นลำดับเลขคณิต มี $d = 1$

และมีพจน์ทั่วไป คือ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1} + (n-1)d$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2009}{1} + (n-1)(1)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2008 + n$$

$$\therefore \frac{a_{993}}{1000a_{991}} = \frac{1}{1000}\left(\frac{a_{993}}{a_{992}}\right)\left(\frac{a_{992}}{a_{991}}\right) = \frac{1}{1000}(2008+992)(2008+991)$$

$$= 3(2999) = 8997$$

41. **ตอบ** 0000.50

วิธีทำ จากอสมการ $\log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3)$

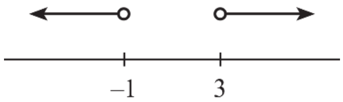
จากเงื่อนไขของ log จะได้ $x^2 > 0$ และ $2x+3 > 0$ และ $2x+3 \neq 1$

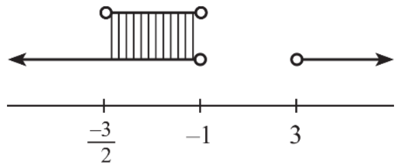
$\boxed{x \neq 0}$ และ $\boxed{x > \frac{-3}{2}}$ และ $\boxed{x \neq -1}$

กรณีที่ 1 ฐานเป็นฟังก์ชันลด $0 < 2x+3 < 1 \rightarrow \boxed{\frac{-3}{2} < x < -1}$

จาก $\log_{2x+3} x^2 < 1$

$$x^2 > 2x+3$$
$$x^2 - 2x - 3 > 0$$
$$(x-3)(x+1) > 0$$



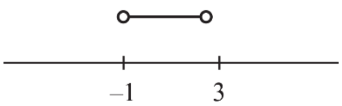


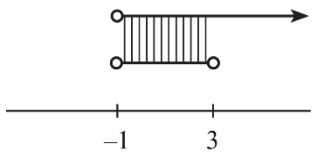
$\therefore$ คำตอบกรณีที่ 1 คือ $\left(\frac{-3}{2}, -1\right)$

กรณีที่ 2 ฐานเป็นฟังก์ชันเพิ่ม $2x+3 > 1 \rightarrow \boxed{x > -1}$

จาก $\log_{2x+3} x^2 < 1$

$$x^2 < 2x+3$$
$$x^2 - 2x - 3 < 0$$
$$(x-3)(x+1) < 0$$





แต่จากเงื่อนไขด้านบน $x \neq 0$

$\therefore$ คำตอบกรณีที่ 2 คือ $(-1, 0) \cup (0, 3)$

เมื่อนำคำตอบทั้ง 2 กรณีรวมกัน จะได้

$$x \in \left(\frac{-3}{2}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 3)$$

ดังนั้น $a = \frac{-3}{2}$, $b = -1$, $c = 0$, $d = 3$

$\therefore \quad a + b + c + d = -1.5 - 1 + 3 = 0.5$

42. **ตอบ** 0062.00

วิธีทำ

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1 = -\sin\frac{\pi}{2}+1 = -1+1 = 0$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right)+1 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1 = \cos\frac{\pi}{3}+1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right)+1 = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1 = -\sin\frac{\pi}{4}+1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}+1$$

$$g\left(\frac{5}{6}\right) = g\left(-\frac{1}{6}\right)+1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+1 = \cos\frac{\pi}{6}+1 = \frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

ดังนั้น $f\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+g\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

จากเงื่อนไขโจทย์ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกโดย $a > b > c$

จะได้ว่า $a = 7, b = 3, c = 2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 7^2+3^2+2^2 = 62$

43. **ตอบ** 0021.00

วิธีทำ จากสมการ $YE \cdot ME = TTT$

พบว่า $YE \cdot ME$ จะมีหลักหน่วย คือ หลักหน่วยของ $E \cdot E$ หรือ E^2 และมีค่าเท่ากับ T

จาก $YE \cdot ME = TTT = T(111) = T \cdot 3 \cdot 37$

ซึ่ง 37 เป็นจำนวนเฉพาะ จึงได้ว่า 37 จะหาร YE หรือ ME ตัวใดตัวหนึ่งได้ลงตัว

กรณี 37 หาร YE ได้ลงตัว

$YE = 37$ หรือ 74 (YE เยอะกว่า 74 ไม่ได้ เพราะ ME ต้องเป็นเลข 2 หลัก)

สมมติให้ $YE = 74$ จะได้ ME น้อยสุด $= 14$ (M น้อยสุด $= 1$)

เราพบว่า $YE \cdot ME = 74 \cdot 14 = 1036$ ไม่มีทางเป็นไปได้เพราะ TTT เป็นเลข 3 หลัก

ที่แต่ละหลักเหมือนกัน ($YE \cdot ME = 111, 222, ..., 999$ เท่านั้น)

จึงได้ว่า $YE = 37$ และเราจะได้ว่า $E^2 = 49$ ดังนั้น $T = 9$

จาก $YE \cdot ME = TTT$ เราจะได้ว่า YE จะหาร TTT ได้ลงตัว และได้ $ME = \frac{TTT}{YE}$

$\therefore$ เมื่อ $YE = 37$ ได้ $TTT = 999$

และ $ME = \dfrac{999}{37} = 27$

ดังนั้น $E = 7, Y = 3, M = 2$ และ $T = 9$

$\therefore$ $E+M+T+Y = 7+2+3+9 = 21$

สำหรับกรณี 37 หาร ME ได้ลงตัว จะทำได้ในทำนองเดียวกัน

ได้ $E = 7, Y = 2, M = 3$ และ $T = 9$

ซึ่งได้ $E+M+T+Y = 21$ เช่นเดียวกัน

44. **<u>ตอบ</u>** 0003.00

<u>วิธีทำ</u>

จาก $\bar{u} \cdot \bar{n} = 0$ จะได้ $\bar{n} \perp \bar{u}$

และ $\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$ จะได้ $\bar{n} \perp \bar{v}$

เราจะได้ว่า $\bar{n} \parallel \bar{u}\times\bar{v}$

และ เมื่อ $\bar{n}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย

จะได้ $\bar{n} = \dfrac{\bar{u}\times\bar{v}}{|\bar{u}\times\bar{v}|}$ (เป็น 1 ตัวอย่างตามเงื่อนไข อีกตัวอย่าง คือ $\bar{n} = -\dfrac{\bar{u}\times\bar{v}}{|\bar{u}\times\bar{v}|}$)

จาก $\bar{u}\times\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $|\bar{u}\times\bar{v}| = 2$

$$\therefore \quad \bar{u} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w} \cdot \bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0+0-3 = -3$$

$\therefore$ $|\bar{w} \cdot \bar{n}| = |-3| = 3$

* กรณีใช้ $\bar{n} = -\dfrac{\bar{u}\times\bar{v}}{|\bar{u}\times\bar{v}|}$ จะได้ $|\bar{w}\cdot \bar{n}| = |3| = 3$ เช่นเดียวกัน

45. **ตอบ** 0000.00

วิธีทำ จากโจทย์แบ่ง 2 กรณี

กรณีที่ 1 $x \geq 0$ $\therefore$ $|x| = x$

$$\left|1 - \frac{x}{1+x}\right| \geq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1+x-x}{1+x}\right| \geq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{1+x}\right| \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{|1|}{|1+x|} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{|1+x|} \geq \frac{1}{2} \;,\; x \neq -1$$

$$2 \geq |1+x| \;,\; x \neq -1$$

$$|1+x| \leq 2 \;,\; x \neq -1$$

$$-2 \leq 1+x \leq 2 \;,\; x \neq -1$$

ลบ 1 , $-3 \leq x \leq 1$, $x \neq -1$

$\therefore$ $x \in [-3, 1] - \{-1\}$

เมื่อนำไป $\cap$ เงื่อนไข ($x \geq 0$) จะได้

$x \in [0, 1]$

กรณีที่ 2 $x < 0 \quad \therefore \quad |x| = -x$

$$\left|1 - \frac{-x}{1+(-x)}\right| \geq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1+(-x) - (-x)}{1+(-x)}\right| \geq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{1-x}\right| \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{|1|}{|1-x|} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{|1-x|} \geq \frac{1}{2} \ , \ x \neq 1$$

$$2 \geq |1-x| \ , \ x \neq 1$$

$$|1-x| \leq 2 \ , \ x \neq 1$$

$$|x-1| \leq 2 \ , \ x \neq 1$$

$$-2 \leq x-1 \leq 2 \ , \ x \neq 1$$

บวก 1 , $\quad -1 \leq x \leq 3 \ , \ x \neq 1$

$x \in [-1, 3] - \{1\}$

เมื่อ นำไป $\cap$ เงื่อนไข $(x < 0)$ จะได้

$x \in [-1, 0)$

นำคำตอบ 2 กรณีมารวมกัน จะได้ว่า

เซตคำตอบ คือ $[0, 1] \cup [-1, 0) = [-1, 1]$

ดังนั้น $a = -1$, $b = 1$ และได้ $a+b = 0$