

เฉลยคณิตศาสตร์

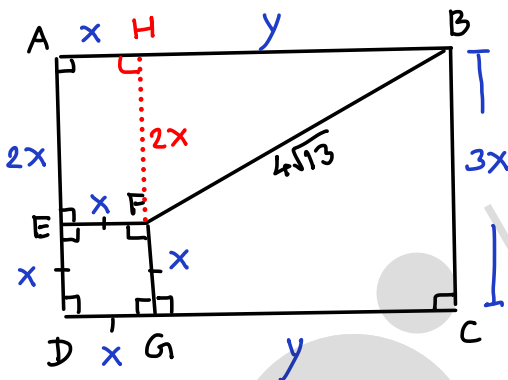
ติวสอบเข้า ม.4 โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา 68

ข้อ 14 หน้า 10 ตอบ 2

14. สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีความยาวด้านเป็นจำนวนตรรกยะ จุด E อยู่บนด้าน DA ทำให้ $DE : DA = 1 : 3$ จุด G อยู่บนด้าน DC ทำให้ $DE = DG$ ให้จุด F อยู่ในสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ทำให้สี่เหลี่ยม DEFG เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มี $FB = 4\sqrt{13}$ หน่วย และพื้นที่สี่เหลี่ยม BAEF เท่ากับ 80 ตารางหน่วย จงหาความยาวเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยม ABCD

1. 48 2. 56 3. 60 4. 64

วาดรูปตามโจทย์



ลาก $FH \perp AB$

สมมติ $DE = x$ จะได้ $AE = 2x$

สมมติ $BH = GC = y$

$$\text{จาก พ.ท. } \square BAEF = \frac{1}{2}(x+x+y)(2x)$$

$$80 = (2x+y)(x)$$

$$\frac{80}{x} = 2x+y$$

$$y = \frac{80}{x} - 2x \quad \text{--- ①}$$

ใน $\triangle BHF$, $BH^2 + FH^2 = BF^2$

$$y^2 + (2x)^2 = (4\sqrt{13})^2 \quad \text{แทน } y \text{ ด้วย } \frac{80}{x} - 2x$$

$$\left(\frac{80}{x} - 2x\right)^2 + 4x^2 = 208$$

$$\left(\frac{6400}{x^2} - 320 + 4x^2\right) + 4x^2 = 208$$

$$8x^2 - 528 + \frac{6400}{x^2} = 0$$

$$8x^4 - 528x^2 + 6400 = 0$$

$$x^4 - 66x^2 + 800 = 0$$

$$(x^2 - 50)(x^2 - 16) = 0$$

$$x^2 = 50, 16$$

98 ไม่ได้ เพราะ
x ต้องเป็นจำนวน
ตรรกยะ

$$\therefore x = 4$$

แทน x ในสมการ ① จะได้ $y = 12$

$\therefore$ ความยาวรอบรูป $\square ABCD$

$$= (16 + 12)(2)$$

$$= 56 \text{ หน่วย}$$

ข้อ 15 หน้า 11 ตอบ 1

15. กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C

ยาว a, b และ c ตามลำดับ ถ้า $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $b = 2\sqrt{3}$ หน่วย แล้วพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC = $3\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

(ข) รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
2. ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
3. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูกทั้งสองข้อ
4. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ผิดทั้งสองข้อ

จากโจทย์ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ นี่ 2 คูณ 3 ค่ะ

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

เนื่องจาก $(a-b)^2 \geq 0$, $(a-c)^2 \geq 0$ และ $(b-c)^2 \geq 0$ ทีเดียว

ดังนั้น สมการนี้จะจริงได้เมื่อ $a-b = 0$ และ $a-c = 0$ และ $b-c = 0$

$\therefore a = b = c$ จะสรุปได้ว่า $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ ด้านเท่า

และ ถ้า $b = 2\sqrt{3}$ จากนี้ พ.ท. $\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

ข้อ 16 หน้า 12 ตอบ 2

16. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวด้านเท่ากับ a, b, c โดยที่ $a < b < c$ และ $c = 2(b - a)$

ถ้าเราทราบว่า $\tan$ ของมุมที่เล็กที่สุดมีค่า $\frac{x + k\sqrt{y}}{z}$ เมื่อ x, y, z, k เป็นจำนวนเต็ม และ

ห.ร.ม. ของ x กับ z เท่ากับ 1 จงหาค่าของ $x + y + z + 2k$

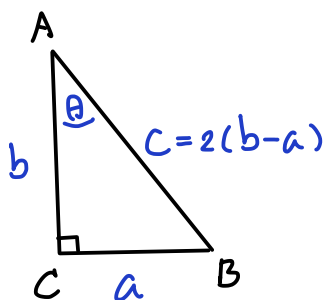
1. 11

2. 12

3. 13

4. 14

วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



เนื่องจาก $a < b < c$ ดังนั้นมุมที่เล็กที่สุดคือ $\hat{A}$
 9. ให้ $\hat{BAC} = \theta$ จะได้ $\tan \theta = \frac{a}{b}$

จาก $a^2 + b^2 = c^2$

$$a^2 + b^2 = (2b - 2a)^2$$

$$a^2 + b^2 = 4b^2 - 8ab + 4a^2$$

$$3a^2 - 8ab + 3b^2 = 0$$

$$\frac{3a^2}{b^2} - \frac{8ab}{b^2} + \frac{3b^2}{b^2} = \frac{0}{b^2}$$

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\frac{a}{b}\right) + 3 = 0$$

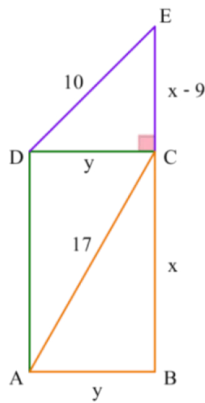
$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(3)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

แต่เนื่องจาก $\frac{a}{b} < 1$ นั่นเอง ดังนั้น $\frac{a}{b} = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$ เทียบกับ $\frac{x + k\sqrt{y}}{z}$

จะได้ $x = 4, k = -1, y = 7, z = 3$

เฉลย Assignment

1. ตอบ 4



จาก $\triangle ABC$, $x^2 + y^2 = 17^2 = 289$ ———(1)

จาก $\triangle DCE$, $(x - 9)^2 + y^2 = 10^2$

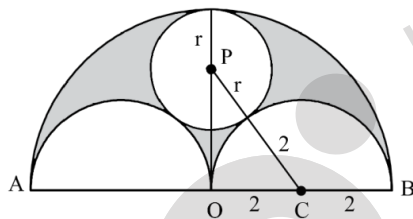
$$x^2 - 18x + 81 + y^2 = 100$$

$$(x^2 + y^2) - 18x = 19$$

$$289 - 18x = 19 \rightarrow x = 15$$

แทนใน (1), $y = 17 \therefore x + y = 23$

2. ตอบ 2



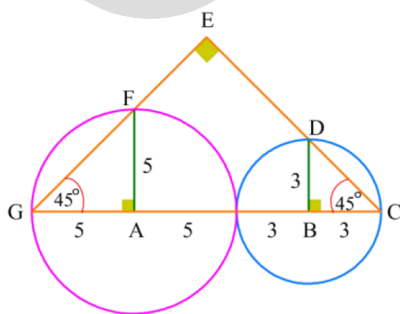
$$PO = 4 - r$$

$$\triangle AOC, (r + 2)^2 = (4 - r)^2 + 2^2$$

$$r = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{พ.ท.แรเงา} = \frac{\pi}{2}(4^2) - \pi(2^2) - \pi\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}\pi$$

3. ตอบ 2



จาก $\triangle AGF$ และ $\triangle BCD$

$$\text{พบว่า } \angle AGF = \angle BCD = 45^\circ \therefore \angle CEG = 90^\circ$$

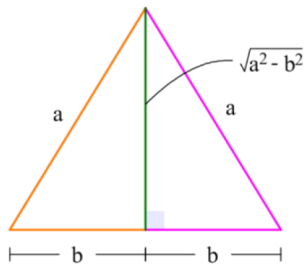
$$\text{ให้ } GE = EC = x$$

$$\text{จาก } \triangle CEG, x^2 + x^2 = 16^2$$

$$2x^2 = 256 \rightarrow x^2 = 128 \therefore x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{เส้นรอบรูป } \triangle CEG = 16 + 16\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

4. ตอบ 4



พ.ท. $\Delta = 3$ ฐาน = 4 (ด้านประกอบมุมยอด)

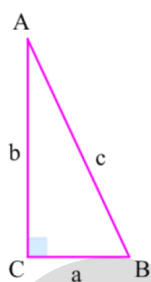
$$\frac{1}{2}(2b)(\sqrt{a^2 - b^2}) = \underbrace{3(2b)}_{b = \frac{2}{3}a} = 4a$$

แทนใน $\frac{1}{2}(2b)\sqrt{a^2 - b^2} = 4a$

$$\frac{2}{3}a\sqrt{a^2 - \frac{4}{9}a^2} = 4a \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3}a = 6 \rightarrow a = \frac{18}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \text{พ.ท. } \Delta = 4a = 4\left(\frac{18}{\sqrt{5}}\right) = \frac{72}{\sqrt{5}} = \frac{72\sqrt{5}}{5} \text{ ตารางหน่วย}$$

5. ตอบ 2



จากรูป $c^2 = a^2 + b^2$

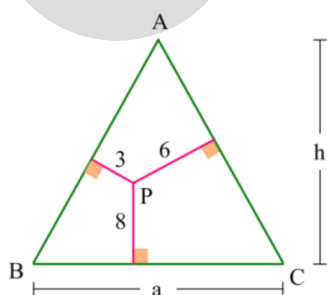
$$(c^2)^3 = (a^2 + b^2)^3$$

$$c^6 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$$

$$c^6 - a^6 - b^6 = 3a^2b^2(a^2 + b^2)$$

$$= 3a^2b^2c^2 = 3(abc)^2$$

6. ตอบ 2



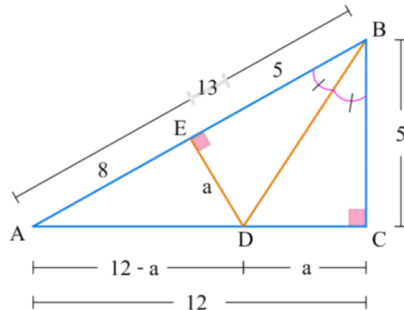
สมมุติด้านทั้งสามของ ΔABC ยาว a

$$[\Delta ABC] = [\Delta PAB] + [\Delta PBC] + [\Delta PAC]$$

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a(3 + 6 + 8)$$

$$\therefore h = 17 \text{ เซนติเมตร}$$

7. ตอบ 2

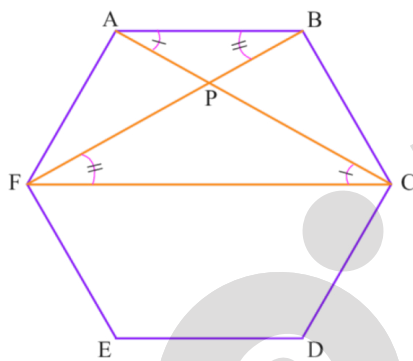


$$\triangle AED \sim \triangle ACB$$

$$\frac{a}{5} = \frac{8}{12} \rightarrow a = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore BD &= \sqrt{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{100}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{325}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{13} \end{aligned}$$

8. ตอบ 2



$$\triangle ABP \sim \triangle CFP$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{FC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ให้ } \text{พ.ท.}\triangle ABP = a$$

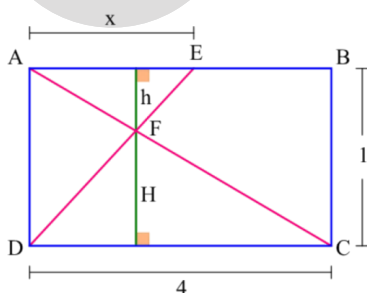
$$\text{พ.ท.}\triangle PBC = 2a = \text{พ.ท.}\triangle APF$$

$$\text{พ.ท.}\triangle FPC = 4a$$

$$\therefore \text{พ.ท.รูปหกเหลี่ยม} = 18a$$

ในที่นี้ $a = 1 \therefore \text{พ.ท.รูปหกเหลี่ยม} = 18$ ตารางหน่วย

9. ตอบ 4



$$\text{สมมุติ } AE = x$$

$$\text{พ.ท.}\triangle AEF = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{6} \rightarrow h = \frac{1}{3x} \quad (1)$$

$$\triangle AEF \sim \triangle FDC, \quad \frac{H}{h} = \frac{4}{x} \rightarrow H = \frac{4}{x}h$$

$$\text{จากรูป } h + H = 1 \rightarrow h + \frac{4}{x}h = 1 \quad (2)$$

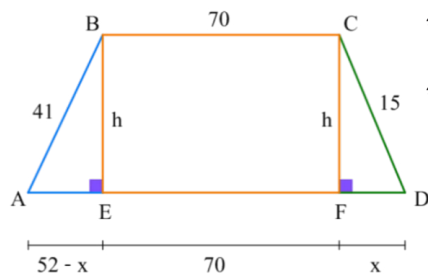
$$\text{แทน (1) ใน (2), } \frac{1}{3x} + \frac{4}{x} \left(\frac{1}{3x} \right) = 1$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{4}{3x^2} = 1 \rightarrow \frac{x+4}{3x^2} = 1$$

$$x+4 = 3x^2 \rightarrow 3x^2 - x = 4$$

$$\therefore x(3x-1) = 4$$

10. ตอบ 2



จาก $\triangle CFD$, $h^2 = 15^2 - x^2$ ————— (1)

จาก $\triangle BEA$, $h^2 = 41^2 - (52 - x)^2$ ————— (2)

จาก (1) และ (2) , $15^2 - x^2 = 41^2 - (52 - x)^2$

$$(52 - x)^2 - x^2 = 41^2 - 15^2$$

$$(52 - 2x)(52) = (41 - 15)(41 + 15) \rightarrow x = 12$$

แทนใน (1) , $h^2 = 15^2 - 12^2 \rightarrow h = 9$

$\therefore$ พ.ท. $\square ABCD = \frac{1}{2}(70 + 122)(9) = 864$ ตารางหน่วย