



## ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์

เพื่อคัดเลือกนักเรียนเข้ารับการอบรมค่าย 1 สอวน. ปีการศึกษา 2564

ชื่อ-สกุล ..... ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์  
เลขประจำตัวสอบ ..... รหัสชุดวิชา 0000001  
สถานที่สอบ ..... สอบวันอาทิตย์ที่ 9 มกราคม 2565  
ห้องสอบ ..... เวลา 09.00-12.00 น.

---

คำชี้แจง

1. กำหนดให้  $a$  และ  $x$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $0 < a < x$  และ  $x^2 + a^2 = 6ax$  จงหาค่าของ  $\frac{x+a}{x-a}$

2. จงหาจำนวนจริง  $x \neq 0$  ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$(13+x)^{\frac{2}{3}} + 4(13-x)^{\frac{2}{3}} = 5(169-x^2)^{\frac{1}{3}}$$

3. กำหนดให้  $a, m, k$  เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นตรง  $y = x - 2a$  ผ่านจุด  $(2m, a)$  ที่อยู่ในจุดภาคที่ 3 และเส้นตรง  $y = 3x - 2k$  ตัดกับพาราโบลา  $y = -2x^2 + x - m + k + 6$  ที่จุด  $(a, 2)$  จงหาค่าของ  $m + k + a$

4. ร้านค้าแห่งหนึ่งขายเมล็ดกาแฟอาราบิก้าผสมโรบัสต้า ถ้าเจ้าของร้านลงทุนซื้อกาแฟโรบัสต้ากิโลกรัมละ 100 บาท และกาแฟอาราบิก้ากิโลกรัมละ 400 บาท แล้วเจ้าของร้านจะต้องผสมกาแฟด้วยอัตราส่วนของโรบัสต้าต่ออาราบิก้าเป็นเท่าใด จึงทำให้ได้กำไร 20% เมื่อขายกาแฟที่ผสมได้ทั้งหมดในราคาต่อกิโลกรัมละ 200 บาท

5. กำหนดให้ บ่อเลี้ยงปลารูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากบ่อหนึ่ง กว้าง  $x$  หน่วย ยาว  $y$  หน่วย และลึก  $z$  หน่วย โดยที่  $x:(y+z) = 1:5$ ,  $z:(x+y) = 2:3$  และ ความยาวของบ่อยาวกว่าความลึกอยู่ 6 หน่วย จงหาพื้นที่ก้นบ่อเลี้ยงปลา

6. จงหาค่าของ  $B(1) + B(2) + \dots + B(99)$  เมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ  $n$

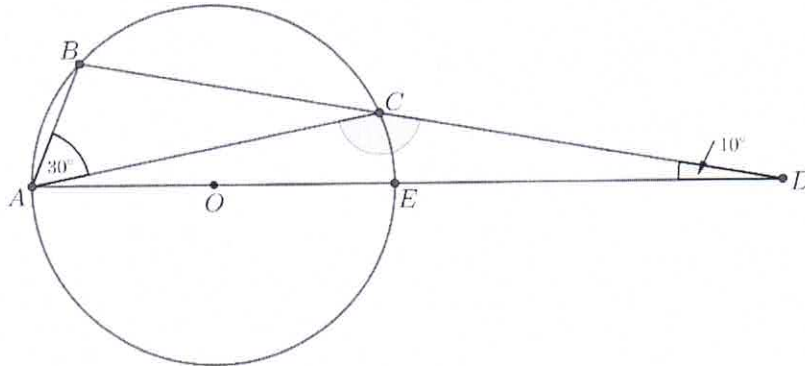
$$B(n) = \begin{cases} \text{จำนวนของเลขโดดที่แตกต่างกันของ } n & \text{ถ้า } 9 \text{ เป็นเลขโดดของ } n \\ 0 & \text{ถ้า } 9 \text{ ไม่เป็นเลขโดดของ } n \end{cases}$$

เช่น  $B(191) = 2$  และ  $B(524) = 0$  เป็นต้น

7. ในการแข่งขันฟุตบอลแบบพบกันหมด มีทีมเข้าร่วมแข่งขันทั้งหมด 7 ทีม ได้แก่ทีม A B C D E F และ G เมื่อการแข่งขันดำเนินไปได้ระยะหนึ่งพบว่า ทีม A แข่งไปแล้ว 6 นัด ทีม B แข่งไปแล้ว 5 นัด ทีม C แข่งไปแล้ว 4 นัด ทีม D แข่งไปแล้ว 3 นัด ทีม E แข่งไปแล้ว 2 นัด และทีม F แข่งไปแล้ว 1 นัด จงหาว่าทีม G แข่งไปแล้วกี่นัด

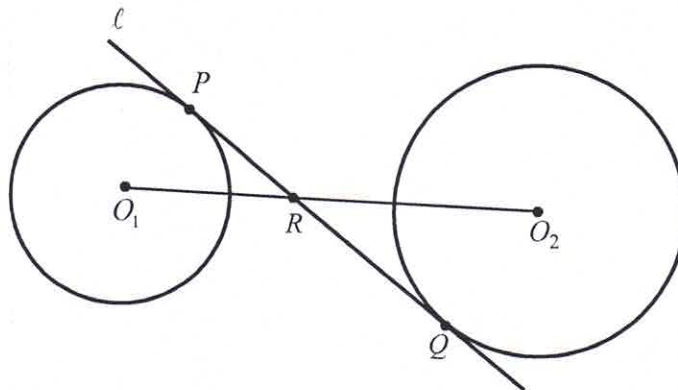
8. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนชั้น ม. 3 จำนวนเท่ากันในทุก ๆ ห้องเรียน จากสถานการณ์การระบาดของโรคติดเชื้อไวรัส COVID-19 เพื่อให้เกิดระยะห่างตามมาตรการ DMHTT ทำให้ต้องจัดห้องเรียนเพิ่มอีก 6 ห้อง และพบว่าจำนวนนักเรียนต่อห้องลดลงจากเดิม 30% พอดี จงหาว่าเดิมชั้น ม. 3 นี้มีกี่ห้อง

9. จากรูป ให้  $A, B$  และ  $C$  อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งมี  $O$  เป็นจุดศูนย์กลาง เส้นตรง  $\overline{AO}$  ตัดกับเส้นตรง  $\overline{BC}$  และวงกลม ที่จุด  $D$  และ  $E$  ตามลำดับ



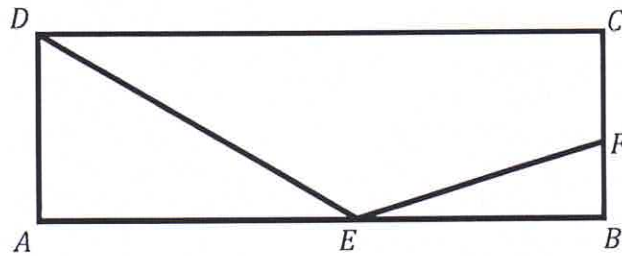
ถ้า  $\angle BAC = 30^\circ$  และ  $\angle CDE = 10^\circ$  แล้ว  $\angle ACD$  มีขนาดเท่าไร

10. จากรูป กำหนดให้เส้นตรง สัมผัสกับวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางเป็น  $O_1$  และ  $O_2$  ที่จุด  $P$  และ  $Q$  ตามลำดับ ให้  $\overline{O_1O_2}$  ตัดกับ  $\overline{PQ}$  ที่จุด  $R$



ถ้า  $PR:RQ = 3:4$ ,  $QO_2 = 12$  หน่วย และ  $O_1O_2 = 28$  หน่วย แล้วจงหาความยาว  $PR$

11. จากรูป รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า  $ABCD$  มีพื้นที่ 105 ตารางหน่วย จุด  $E$  และ  $F$  อยู่บนด้าน  $\overline{AB}$  และ  $\overline{BC}$  ตามลำดับ ถ้า  $AE:EB=4:3$  และ  $BF:FC=2:3$  แล้วจงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม  $EBF$



12. กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ  $\left(a^3 + \frac{8}{a^3}\right)^2 = 9,025$  จงหาค่าของ  $a + \frac{2}{a}$
13. จงหาพหุนาม  $P(x)$  ที่มีดีกรีน้อยที่สุด ซึ่ง  $P(1) = P(2) = 1$  และ  $P(3) = 5$
14. จงหาผลรวมของจำนวนเต็มบวก  $n$  ทั้งหมด โดยที่  $10 \leq n \leq 99$  และ  $n^k$  มีเลขสองหลักสุดท้าย เหมือนกับ  $n$  สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก  $k$
15. จงหาจำนวนของสามสิ่งอันดับ  $(a, b, c)$  ทั้งหมดที่  $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  และ  $(a+3)^{b^c}$  หารด้วย 4 ลงตัว
16. กล้องทีบสองกล้องแต่ละกล้องบรรจุสลากเลข 1, 2, 3 และ 4 อย่างละหนึ่งใบ คุณครูสุ่มหยิบสลากกล้องละ 1 ใบ เด็กชาย A ทราบผลรวมของเลขบนสลากที่คุณครูหยิบได้ในขณะที่เด็กหญิง B ทราบผลคูณของเลขบนสลากดังกล่าว จากนั้นให้ทั้งสองคุยกันเพื่อทายว่าคุณครูหยิบได้เลขอะไรบ้าง
- เด็กชาย A: เธอรู้ไหมว่าคุณครูหยิบได้เลขอะไรบ้าง
- เด็กหญิง B: พยายามคิดแล้วแต่ตัวเลขที่ได้ยินมันยังบอกไม่ได้ว่าคุณครูหยิบได้เลขอะไรบ้าง แล้วเธอล่ะ
- เด็กชาย A: ตอนแรกก็ไม่รู้ แต่ตอนนี้รู้แล้วแหละ ฉันได้ยินคนละเลขกับเธอนะ
- เด็กหญิง B: อ้อ ตอนนี้นี่ฉันก็รู้แล้ว
- จากข้อมูลข้างต้น ถ้าการวิเคราะห์ของทั้งสองคนนี้ถูกต้อง และให้  $a, b$  เป็นเลขที่คุณครูหยิบได้ แล้วค่าของ  $a^2 + b^2$  เป็นเท่าใด

17. นักเรียนกลุ่มหนึ่ง จำนวน 5 คน ได้แก่ นักเรียน A B C D และ E ถูกคัดเลือกให้เป็นตัวแทนของโรงเรียน เพื่อเข้าแข่งขันคณิตคิดเร็วระดับเขต โดยคุณครูได้จัดเตรียมเงินรางวัล ประกอบด้วย เหรียญมูลค่าห้าสิบบาท ห้าบาท สองบาท ห้าบาท สิบบาท อย่างละ 1 เหรียญ และธนบัตรมูลค่าใบละ ยี่สิบบาท ห้าสิบบาท หนึ่งร้อยบาท ห้าร้อยบาท หนึ่งพันบาท อย่างละ 1 ใบ ซึ่งนักเรียนแต่ละคนจะได้รับเงินเป็นเหรียญ 1 เหรียญและธนบัตร 1 ใบ เท่านั้น ปรากฏว่า

- นักเรียน B, นักเรียนที่ได้ธนบัตรยี่สิบบาท, นักเรียนที่ได้ธนบัตรห้าสิบบาท, นักเรียนที่ได้เหรียญสองบาท และนักเรียนที่ได้เหรียญห้าสิบบาท เป็นคนละคนกัน
- นักเรียน D ไม่ได้ธนบัตรยี่สิบบาท
- นักเรียนที่ได้เหรียญห้าสิบบาทคือ นักเรียน A
- ธนบัตรที่นักเรียน C ได้มีมูลค่าหนึ่งร้อยบาท
- นักเรียน D ได้เหรียญห้าบาทเป็นรางวัล
- นักเรียน E ไม่ได้เหรียญหนึ่งบาท
- นักเรียนที่ได้เหรียญหนึ่งบาทไม่ได้ธนบัตรหนึ่งพันบาท

จากข้อมูลข้างต้นอยากทราบว่านักเรียน B ได้รับเงินจากครุรวมกี่บาท

18. ในห้องเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนทั้งหมด 24 คน นักเรียนแต่ละคนจะพูดข้อความต่อกันทีละคน ดังนี้

คนที่ 1 “ไม่มีใครในห้องนี้พูดจริงเลย”

คนที่ 2 “ในห้องนี้มีคนพูดจริงอย่างมาก 1 คน”

คนที่ 3 “ในห้องนี้มีคนพูดจริงอย่างมาก 2 คน”

คนที่ 4 “ในห้องนี้มีคนพูดจริงอย่างมาก 3 คน”

⋮

คนที่ 23 “ในห้องนี้มีคนพูดจริงอย่างมาก 22 คน”

คนที่ 24 “ในห้องนี้มีคนพูดจริงอย่างมาก 23 คน”

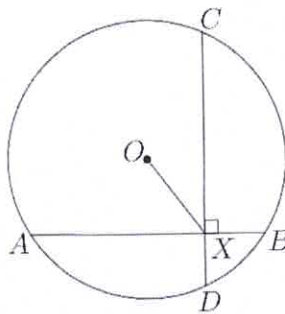
จงหาว่า มีคนที่พูดจริงในห้องนี้อยู่กี่คน

19. กำหนดให้  $n \geq 2$  เป็นจำนวนนับ สุ่มเลือกจำนวนนับ  $a, b$  โดยที่  $a, b \in \{1, 2, \dots, n^2\}$   
 จงหาความน่าจะเป็นที่สมการ  $x^2 + ax + b = 0$  จะมีคำตอบเดียว

20. กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมีเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุม  $\angle ABC$  ตัดกับเส้นแบ่งครึ่งมุม  
 ภายนอกของมุม  $\angle ACB$  ที่จุด  $D$  ให้เส้นตรงที่ขนานกับด้าน  $BC$  และผ่านจุด  $D$  ตัดด้าน  $AC$  ที่จุด  $E$   
 และตัดด้าน  $AB$  ที่จุด  $F$  ถ้า  $EF = 9$  หน่วย และ  $BF = 16$  หน่วย แล้ว  $CE$  มีค่ากี่หน่วย

21. กำหนดให้วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  มีจุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลาง และสัมผัสด้าน  $AB$  ที่จุด  $D$   
 ลากเส้นจากจุด  $B$  ผ่านจุด  $O$  ไปตัดวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  ที่จุด  $P$  ถ้า  $AC = 15$  หน่วย  
 และ  
 $AP = 9$  หน่วย แล้ว อัตราส่วน  $BO : OD$  มีค่าเท่าใด

22. ให้  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งซึ่งมีคอร์ด  $AB$  และ  $CD$  ตั้งฉากและตัดกันที่จุด  $X$  ดังรูป



ถ้า  $AB = 56$  หน่วย,  $CD = 64$  หน่วย และ  $OX = 28$  หน่วย แล้วรัศมีของวงกลมวงนี้ยาวกี่หน่วย

23. มีลูกบาศก์ทรงตันที่ทำมาจากโลหะ 2 ชนิด ดังนี้

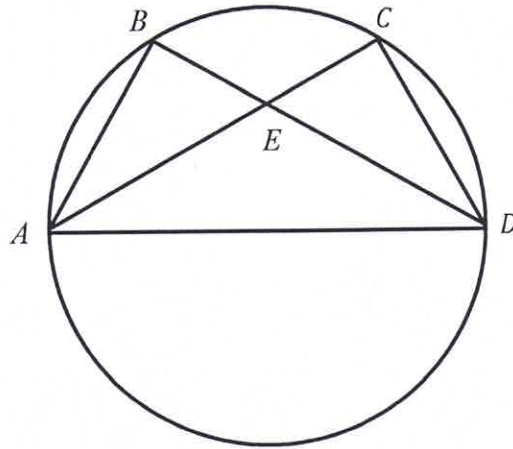
ชนิดที่ 1 ลูกบาศก์มีความกว้าง 3 เซนติเมตร หนัก 200 กรัม จำนวน 100 ลูก

ชนิดที่ 2 ลูกบาศก์มีความกว้าง 2 เซนติเมตร หนัก 400 กรัม จำนวน 100 ลูก

ให้ถัง A มีน้ำเต็มถึงพอดี และเลือกลูกบาศก์รวม  $m$  ลูกจากทั้งสองชนิดข้างต้น หลังจากนั้นทำการหย่อน  
 ลูกบาศก์ทั้งหมดที่เลือกมาลงไปในถัง A โดยไม่มีส่วนใดของลูกบาศก์ลูกใดโผล่เหนือผิวน้ำ พบว่ามีน้ำล้น  
 ออกมาจากถัง A ไม่เกิน 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร ถ้าน้ำหนักรวมของลูกบาศก์ที่หย่อนลงไปเท่ากับ 20  
 กิโลกรัม แล้ว  $m$  มีค่าเป็นไปได้มากที่สุดเท่ากับเท่าไร

หมายเหตุ: จากหลักการของอาร์คิมิดีส เราสามารถสรุปได้ว่า เมื่อนำวัตถุใส่ลงในภาชนะปริ่มน้ำ ปริมาตรน้ำที่  
 ล้นออกมาจะเท่ากับปริมาตรของวัตถุในส่วนที่จมน้ำ

24. กำหนดให้วงกลมมี  $\overline{AD}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ  $\overline{AC}$  ตัดกับ  $\overline{BD}$  ที่จุด  $E$  ดังรูป



ถ้า  $AE = \sqrt{13}$  หน่วย,  $BE = 2$  หน่วย และ  $CD - CE = 3$  หน่วย แล้วจงหาค่าของ  $AD^2$

25. สำหรับจำนวนจริงบวก  $x, y$  ใด ๆ กำหนดให้

$$x \oplus y = \frac{xy}{x+y}$$

ซึ่งตัวดำเนินการ  $\oplus$  มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม นั่นคือ  $x \oplus y \oplus z = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

จงหาค่าของ

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \oplus (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \oplus (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \oplus \dots \oplus (18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21)$$

(ตอบเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็ม โดยไม่จำเป็นต้องเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

26. จงหาจำนวนจริง  $t$  ทั้งหมดที่ทำให้สมการ  $-2 < \frac{2x^2 + tx - 3}{x^2 + x + 2} < 3$  เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง  $x$

27. จงหาจำนวนเต็มบวกมากที่สุดซึ่งมี 2564 เป็นตัวประกอบ และมีจำนวนตัวหารบวกอยู่ทั้งหมด 2021 จำนวนพอดี

(หมายเหตุ: 43, 47 และ 641 เป็นจำนวนเฉพาะ)

28. จงหาคู่อันดับ  $(x, y)$  ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$$(\sqrt{x})^{x+y} = y^{12} \text{ และ } (\sqrt{y})^{x+y} = x^3$$

29. ให้  $A$  เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ  $r = \frac{a}{b}$  ทั้งหมด ที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1 โดย  $a, b$  เป็นจำนวนเต็มบวก

ซึ่ง ห.ร.ม. ของ  $a$  และ  $b$  เท่ากับ 1 และ  $ab = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  จงหาจำนวนสมาชิกของ  $A$

30. จากรูปกำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหมายเลข ①, ②, ③, ④ และ ⑤ มีพื้นที่เท่ากับ 13, 26, 20, 25 และ 27 ตารางหน่วย ตามลำดับ จงหาว่ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แรเงามีพื้นที่เท่าใด

